Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

Analisi dei Sistemi Ad Eventi

-Preparazione Esame-

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

Analisi dei sistemi ad eventi

TEORIA PROBABILITÀ / CODE

PROBABILITÀ: un concetto fondamentale della teoria delle probabilità è quello di ESPERIMENTO; che può definirsi come un'operazione il cui risultato è incerto

→ l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento è detto spazio campione Ω
→ ad ogni evento può essere associata una misura che quantifica la possibilità che questo evento accada

$P(A) = \lim_{N \to \infty} \left[\frac{N_a}{N} \right]$ N è il numero di volte che l'esperim. viene effettuato. Na il n° di volte che occ.

PROBABILITÀ: è una funzione $P(): \Omega \to [0,1]$ che associa ad ogni evento elementare $w_i \in \Omega$ la sua probabilità $P(w_i)$ → rappresenta la percentuale di volte che ci si aspetta che l'evento elementare accada.

$\boxed{P(A) = \text{CASI FAVOREVOLI / CASI POSSIBILI}}$

VARIABILE ALEATORIA $\xrightarrow{P(x)}$ VALORE ATTESO

(!) La matematica probabilistica nasce invece proprio con lo scopo di dire qualcosa di più, ovvero per prevedere il futuro. Poiché il futuro non è noto a priori possiamo "prevedere" il valore di x solo in termini probabilistici

VARIABILE ALEATORIA: ogni singolo evento w di uno spazio campione delle prove Ω può essere associato in modo biunivoco a un numero attraverso una particolare funzione matematica (assume un insieme di valori)

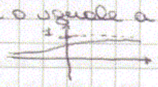
$X(): \Omega \to \mathbb{R}$

- La relazione tra i valori di una v.a e le probabilità ad essi corrispondente è espressa dalla legge di probabilità che può assumere forme diverse

VALORE ATTESO: data una variabile aleatoria X con il suo insieme di definizione X, definiamo valore atteso di X la quantità $\boxed{\sum_{\Omega} x \, P(x)}$ media pesata probabilità di ogni valore che può assumere la v.a

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ: $f_X(\cdot): X \Rightarrow [0,1]$ ($P_X(\cdot)$ per caso discreto)
La funzione densità di probabilità rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria X assuma il valore X_i in conseguenza dell'accadere di un certo evento elementare.

FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ: La distribuzione di probabilità $F_X(x)$ di una variabile aleatoria X, esprime la probabilità che X assuma un valore minore o uguale a x ed è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ come $F_X(x) = Pr(X \leq x)$



La funzione densità di probabilità e funzione di distribuzione sono legate

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y) \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)$$

TEORIA DELLE CODE: comprende lo studio matematico delle code o linee di attesa. La formazione delle linee di attesa è un fenomeno comune che si verifica ogni volta che la normale domanda per un servizio supera la capacità normale di attuare quel servizio

→ (!) l'obbiettivo è raggiungere un equilibrio economico fra il costo del servizio e il costo dell'attesa per quel servizio

I sistemi di file d'attesa sono caratterizzati da un arrivo ~~...~~ casuale dei clienti, ciascun richiedente un'operazione (servizio ad un apposita unità/stazione di servizio

→ CODA → SERVENTE (S) → OUT

PARAMETRI:
- t_a = tempo arrivo del cliente / variabile aleatoria contin.
- t_s = tempo di servizio / variabile aleatoria continua
- DIMENSIONE CODA / variabile deterministica
- t_q = tempo complessivo speso dal generico cliente nella coda
- t_w = tempo complessivo speso dal generico cliente nel sistema
- S = numero di serventi
- n = numero di clienti nel sistema / v.a. discreta
- disciplina di servizio (clienti in fila di attesa vengono serviti)
- dimensione popolazione di utenti
- comportamento del cliente dopo il servizio
- L, lunghezza massima della coda, max utenti attese

$\ell = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq s \\ n-s & \text{se } n \geq s \end{cases}$ $\qquad t_w = t_q + t_s$

→ VALORE ATTESO $(E_{t_a}) = T_a$

un sistema di file d'attesa è costituito dalla combinazione di due processi stocastici uno di arrivi (t_a) ed uno di servizio caratterizzato da (t_s)

λ (freq. di arrivo) $= \frac{1}{E(t_a)}$

μ (velox arrivo) $= \frac{1}{E(t_s)}$

se $S = 1$ ⇒ fattore di utilizzazione $\boxed{\rho = \frac{E\{t_s\}}{E\{t_a\}} = \frac{\lambda}{\mu}}$ → frazione di tempo in cui il servente è occupato

Scopo dell'analisi di un sistema di file d'attesa è fondamentalmente quello di determinare la probabilità $P_n(t)$ dei vari stati nel tempo

LEGGI DI LITTLE

$\boxed{N = \lambda \cdot W}$ $\quad \boxed{L = \lambda W_q}$ $\quad \boxed{W = W_q + \frac{1}{\mu}}$

N → valor medio di clienti nel sistema
λ → numero medio di arrivi nel sistema
W → valor medio del tempo speso nel sistema

Una volta note le probabilità $P_n(t)$ è possibile ricavare il valore atteso N, del numero di clienti nel sistema (n° clienti)

$$N = E\{n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n \qquad L = E\{l\} = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S) \cdot P_n \qquad W = E\{t_w\} = \int_0^{\infty} t \cdot f_{t_w}(t)\,dt \qquad W_q = E\{t_q\} = \int_0^{\infty} t \cdot f_{t_q}(t)\,dt$$

KENDALL : la prima lettera indica il tipo di ingressi, la seconda il tipo di servizi, e la terza il numero di serventi → inoltre ci sono anche (A) capacità di accedere un numero max di clienti (B) popolazione sorgente

↳ (M) indica una distribuzione esponenziale (D) distribuzione deterministica (G) distribuzione generale

(Ek) per indicare una distribuzione di tipo Erlang con parametro K

(!) se vengono presentati soli due simboli significa che gli ultimi hanno valore infinito

Inoltre studiamo il caso a REGIME → in condizioni di stazionarietà

Se $S = 1$

→ $\boxed{\rho = 1 - P_0}$, Interpretando P_0 come la frazione di tempo durante la quale il servente è inoperoso

(NASCITA E MORTE) : il termine nascita si riferisce all'arrivo di una nuova unità e il termine morte alla partenza di un'unità servita — no arrivi simultanei —

STATO AL TEMPO t	EVENTI DA t a t+Δt	Probabilità
E_{n-1}	un'entrata	$P_{n-1}(t) \cdot [\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t)]$
E_{n+1}	un'uscita	$P_{n+1}(t) \cdot [\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)]$
?	eventi multipli	$o(\Delta t)$
E_n	nessun evento	$P_n(t) \cdot [1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)]$

le nascite e le morti si verificano a caso con una cadenza media che dipende solo dallo stato

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_n(t)[1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t] + o(\Delta t)$$

$$P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$ perché sono in condizioni di stazionarietà

① $P_n = \dfrac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdots \mu_1} \cdot P_0 \quad n \geq 1$ ② $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$\boxed{P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j} P_0} \qquad \boxed{P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j}}}$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$Pr\{$almeno un arrivo in $(0;t]\} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) = 1 - P_0(t) & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \Rightarrow F_{t_a}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \Rightarrow$ valore atteso $E(t_a) = \dfrac{1}{\lambda}$

Arrivi POISSONIANI o ARRIVI ESPONENZIALI: processo di arrivi ad un sistema di file di attesa che soddisfi le ipotesi dei processi di sole nascite con $E(n) = \lambda$

→ • PROPRIETÀ DI MARKOV (assenza di memoria) $P_r < t_a \leq t \mid t_a > t_0 > = P_r(t_a \leq t - t_0)$ per $t \geq t_0$

↳ questo significa che sapere che in un certo intervallo t_0 non si è verificato nessun arrivo non fornisce alcuna informazione in termini di probabilità, ovvero, qualsiasi sia l'istante in cui si inizi ad esaminare un processo esponenziale è come se il processo iniziasse in quell'istante

(!) DISTRIBUZIONE STAZIONARIA (PROCESSI DI NASCITA/MORTE) → quando il sistema di code ha raggiunto il regime stazionario, le probabilità di stato $\{P_n(t)\}$ diventano costanti indipendenti dal tempo (STUDIEREMO SEMPRE QUESTI CASI)

→ Esiste una soluzione stazionaria se esistono finiti i seguenti limiti $\lim_{t \to \infty} P_n(t) = P_n$ per $n = 0, 1, 2$

→ da cui le due formule di P_n e P_0 → Inoltre si è ipotizzato che la serie al denominatore converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j} < \infty$$

~~APPLICAZIONI (NASCITA/MORTE)~~)

↳ ipotesi comune a tutti i casi che i clienti sono serviti nell'ordine di arrivo strategia: FIFO

— APPLICAZIONI DEI PROCESSI DI NASCITA E MORTE —

(SISTEMI M/M/1)

Si consideri un sistema di file d'attesa con un solo servente in cui il processo degli arrivi sia Poissoniano con λ e la funzione di distribuzione dei tempi di servizio sia esponenziale con parametro μ

M / M / (1) → numero di serventi

↳ associamo λ → tempo di arrivo → distribuzione esponenziale → variabile aleatoria continua

↳ associamo μ → tempo di servizio → distribuzione esponenziale

per le condizioni di stazionarietà $\lambda_n = \lambda$ per $n = 0, 1, 2 \ldots$ $\mu_n = \mu$ per $n = 1, 2, 3$

↳ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n < \infty \to \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$ $\quad \boxed{P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad \boxed{P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n (1-\rho)}$ per $n \geq 0$

$$\boxed{N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}} \quad \boxed{W = \frac{1}{\mu - \lambda}} \quad \boxed{W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}} \quad \boxed{L = \frac{\rho^2}{1-\rho}}$$

(!) se $\lambda \geq \mu$ essendo la velocità di arrivo superiore alla velocità di servizio, le dimensioni della coda crescerebbero a dismisura fino a diventare infinitamente grandi

↳ posso avere una coda anche se $\lambda < \mu$ in quanto λ e μ sono valori attesi

$$\boxed{f_T(t) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}} \quad \text{per } t \geq 0$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

TEORIA PROBABILITÀ / CODE

SISTEMI M/M/S → serventi in parallelo

sistema di file d'attesa con arrivi poissoniani ed S serventi, ciascuno dotato di una densità di probabilità esponenziale del tempo di servizio con parametro μ

ts di un'unità ha una distribuzione esponenziale con media $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ → indipendente da quella degli S serventi presso servizio all'unità di arrivo.

PROCESSO DI NASCITA-MORTE →
$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda & \text{per } n = 0,1,2,3\ldots \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{per } 1 \le n \le S \\ S\mu & n \ge S \end{cases} \end{cases}$$

μ_n → velocità media di servizio alla quale le unità servite abbandonano il sistema.

CONDIZIONI DI STAZIONARIETÀ:
↳ $\boxed{\lambda < S\mu}$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot \frac{S\mu}{S\mu - \lambda}}}$$

$$\begin{cases} P_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 & 1 \le i \le S \\ P_i = \frac{1}{S!} \cdot \frac{1}{S^{i-S}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 & i \ge S \end{cases}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$$

(!) OSS: la probabilità che un cliente debba attendere è uguale alla probabilità che egli trovi nel sistema un numero di clienti maggiore o uguale al numero di serventi

SISTEMI M/M/1/K

L'ipotesi che il sistema di file di attesa possa accomodare un numero comunque grande di clienti in attesa di essere serviti non può mai essere verificata

↳ Si suppone ora che la coda sia limitata, ossia che il numero massimo di clienti che possono stare stare contemporaneamente ~~in coda~~ nel sistema sia K

↳ Si suppone che l'intervallo tra arrivi consecutivi sia esponenziale con parametro γ e che un cliente che al suo arrivo trovi il sistema nello stato E_K abbandoni il sistema cercando servizio altrove senza alterare la distribuzione degli arrivi

PROCESSO NASCITA-MORTE
$$\begin{cases} \lambda_n \begin{cases} \gamma & 0 \le n \le K-1 \\ 0 & n \ge K \end{cases} \\ \mu_n = \mu & n = 1,2,3\ldots \end{cases}$$

K è la dimensione del sistema

(!) OSS: si noti che γ non rappresenta l'effettiva frequenza media degli arrivi al sistema, visto che tiene conto anche degli arrivi che non entrano nel sistema quando lo trovano nello stato E_K

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^i} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\mu}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}}$$

$$P_i = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^i P_0 & 1 \le i \le K \\ 0 & i > K \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{E(t_a)} = \mu\rho = \mu(1 - P_0) = \varepsilon \cdot \gamma}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} < 1}$$

→ frazione di clienti potenziali del sistema che può essere effettivamente servita

(!) in questo caso non è richiesto che sia $\frac{\gamma}{\mu} < 1$ perchè la condizione di stazionarietà si riduce in questo caso ad una somma di un numero finito di termini quindi risulta sempre soddisfatta

→ PROPRIETÀ DI AUTOREGOLAZIONE: escludendo un certo numero di clienti, porta la frequenza effettiva degli arrivi ad essere minore di quella di completamento dei servizi

VALOR ATTESO DEI CLIENTI NEL SISTEMA:
$$\boxed{N = \frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} - \frac{(K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}}$$

SISTEMA TANDEM: (RETI CODE APERTE) → hanno uno scambio con l'esterno con uno o più flussi dall'esterno

$$\to \underset{\text{centro assiemaggio}}{\overset{\mu_A}{\boxed{AS}}} \to \underset{\text{centro ispezione}}{\overset{\mu_I}{\boxed{I}}} \to \lambda_A$$

$$\underset{\text{valore atteso intero sist}}{N} = \underset{MM1}{N_A} + \underset{MM1}{N_I} = \frac{\lambda_A}{\mu_A - \lambda_A} + \frac{\lambda_I}{\mu_I - \lambda_I}$$

TEOREMA DI JACKSON rete di code aperta, $1/\lambda_j \rightarrow$ valore atteso del tempo di arrivo, $1/\mu_j$ valore atteso del tempo di servizio, M macchine

→ IPOTESI
a) arrivi distribuiti esponenzialmente con λ_j
b) tempo di servizio distribuito esponenzialmente con μ_j $\quad \boxed{\sum_{j=0}^{M} P_{ij} = 1}$ dove 0 è l'esterno 1 ... M macchine
c) P_{ij}, la probabilità di instradamento da i a j → probabilità di passare dalla macchina i a j
↳ mi dice il peso degli archi
d) code illimitate
f) prob. che nella stazione j ci siano n_j clienti $f_j(n_j) = \begin{cases} \frac{1}{n_j!} \left(\frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)^{n_j} f_j(0) & n_j \le s_j \\ \frac{1}{s_j!\, s_j^{n_j - s_j}} \left(\frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)^{n_j} f_j(0) & n_j \ge s_j \end{cases}$

affinché questa sia una distribuzione di probabilità si deve avere che:

$\sum_{n_j=0}^{\infty} f_j(n_j) = 1 \qquad \lambda'_j < s_j \mu_j \qquad$ λ' effettivo → reali arrivi alla stazione (tengo conto delle interconnessioni tra stazioni)

$$\boxed{\lambda'_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{M} P_{ij} \cdot \lambda'_i}$$

→ TESI

$\boxed{P(n_1 \ldots n_M) = \prod_{j=1}^{M} f_j(n_j)}$ possiamo trattare le stazioni come se fossero indipendenti poiché ho sostituito il λ con il λ' effettivo
↳ ci dice che le variabili sono indipendenti, quindi posso considerare ogni singolo sistema separato dagli altri

(!) così calcolando λ', posso utilizzare tutte le formule ricavate in precedenza. M/M/1 etc... etc

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

RETI DI CODE

Le reti di code sono oggetto di studi approfonditi sia dal punto di vista modellistico che specificatamente matematico → nei 70' si è cominciato a studiare la possibilità di applicare queste metodologie ai sistemi produttivi.

<u>RETE DI CODE</u>: è l'interconnessione di un insieme di M stazioni ($j = 1 \dots M$) ciascuna costituita da uno o più serventi e una coda. La stazione J consiste di s_J serventi identici ed in parallelo

↳ TEOREMA 1: se il numero degli arrivi in un intervallo di tempo di lunghezza t ha distribuzione poissoniana, il tempo di interarrivo alla stazione ha distribuzione esponenziale

↳ TEOREMA 2: la somma di variabili aleatorie poissoniane di parametro $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ rispettivamente è una variabile aleatoria poissoniana di parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_n$

- TEMPO INTERARRIVO: è una variabile aleatoria pari al tempo che intercorre tra due successivi arrivi ad un sistema di servizio

↳ TEOREMA 3: (BURKE) Il processo delle uscite da un sistema M/M/S con coda di capacità infinita è un processo poissoniano di parametro λ uguale a quello che caratterizza il processo degli arrivi a tale sistema

RETE APERTA: (sono possibili ingressi nella rete dall'esterno e uscite verso l'esterno)

↳ è un insieme di M stazioni interconnesse da un sistema di trasporto, in cui possono avvenire ingressi di clienti nel sistema, uscite dal sistema, o trasferimenti di un cliente da una stazione a un'altra

- La scelta della stazione ove il cliente si va a porre può essere sia deterministica che stocastica → processo aleatorio è la versione probabilistica del concetto di sistema dinamico

<u>SISTEMA TANDEM</u>: rappresenta il reparto di assiematura di un sistema produttivo, in cui i componenti sono prelevati da un magazzino e posti in scatole (KIT), dopodiché sono avviati all'assiematura (A) successivamente al collaudo e imballaggio (I)

$$\xrightarrow{\text{KITTING}} \boxed{\text{ASSIEM}}_{\mu_A} \longrightarrow \boxed{\text{INSPECT}}_{\mu_I} \longrightarrow$$

- TANDEM: significa che l'uscita da una stazione costituisce l'ingresso nella successiva
- <u>STATO</u>: può essere descritto come il numero di clienti presenti nel sistema ad un certo istante
- <u>DISTRIBUZIONE DI EQUILIBRIO</u>: perché il sistema l'ammetta, il valore atteso del numero di volte che si osserva un ingresso in qualunque stato nell'unità di tempo deve uguagliare il valore atteso del numero di volte che si osserva un'uscita da quello stato $\lambda_A P(0,0) = \mu_I P(0,1)$

<u>TEOREMA JACKSON</u>:

HP → 1) Gli arrivi dall'esterno a ciascuna stazione J sono poissoniani con frequenza media λ_J
→ 2) I tempi di servizio in ciascun servente della stazione J sono esponenziali di parametro μ_J
→ 3) La disciplina di servizio è fifo (FIRST INPUT FIRST OUTPUT)
→ 4) un cliente che esce dalla stazione J ha probabilità p_{JK} di essere instradato alla stazione K e probabilità p_{J0} di uscire dal sistema $\left(p_{J0} = 1 - \sum_{K=1}^{M} p_{JK}\right)$
→ 5) ogni stazione ha un buffer d'ingresso illimitato

OSSERVAZIONE: tutti i pezzi che arrivano a ciascun centro di lavorazione vengono trattati allo stesso modo con tempo medio di lavorazione $1/\mu_J$ → indipendentemente dal fatto che essi visitino la stazione J per la prima volta o no

$$f_J^A(n_J) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda'_J}{\mu_J}\right)^n f_J^A(0) & \text{per } n \le s_J \\[2ex] \dfrac{1}{s_J!\, s_J^{n-s}}\left(\dfrac{\lambda'_J}{\mu_J}\right)^n f_J^A(0) & \text{per } n \ge s_J \end{cases}$$

e $f_J^A(0)$ è tale che $\forall J$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} f_J^A(n) = 1$

e se $\forall$ stazione vale la $\lambda'_J < s_J \mu_J$
→ la capacità produttiva di ciascuna stazione deve essere strettamente maggiore della frequenza effettiva degli arrivi a quella stazione

TH → allora esiste una distribuzione stazionaria di probabilità, e la probabilità che il sistema si trovi nello stato $(n_1, n_2, \dots n_M) = \prod_{J=1}^{M} f_J^A(n_J)$

Il th. JACKSON ci dice che l'interazione tra le varie stazioni può interamente riassumersi attraverso le frequenze effettive degli arrivi λ'_i

→ I termini $f_J^A(n_J)$ che figurano nell'espressione della probabilità $P(n)$ sono esattamente gli stessi che esprimono la probabilità di avere n_J clienti alla stazione M_J presa singolarmente quando il processo degli arrivi a questa stazione è descritto da una distribuzione esponenziale di parametro λ'_J e con capacità di servizio μ_J

$\boxed{P(n_1, n_2, \dots n_M) = \prod_{J=1}^{M} \rho_J^{n_J}(1-\rho_J)}$ $\boxed{W = N/\lambda}$ $\boxed{\lambda = \sum_{J=1}^{M} \lambda_J}$ $\boxed{v_J = \dfrac{\lambda'_J}{\lambda}}$ → valore atteso del numero di visite di un pezzo alla stazione J

Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

→ $W_J = 1/(\mu_J - \lambda_J)$ → valore atteso del tempo trascorso in media da un pezzo nella stazione J
↳ è valida soltanto quando il pezzo visita la stazione J una e una sola volta

$\boxed{W_J = v_J \cdot W_J}$ → tiene conto anche delle visite multiple

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO n_{JK} lo stato $(n_1, n_2, \dots, n_J+1, n_K-1, \dots, n_H)$ → ovvero lo stato che differisce da n per il fatto di avere un pezzo in più in J e un pezzo in meno in K.

$n_{0K} \rightarrow (n_1, n_2, \dots, n_K-1, \dots, n_H)$ $\quad n_{J0} \rightarrow (n_1, n_2, \dots, n_J+1, \dots, n_H)$.

$r_J(n)$ è la frequenza dei servizi nella stazione J quando ci troviamo nello stato $n = (n_1, n, \dots n_H) = \min(n_J, s_J)\mu_J$

$$\sum_{J=1, n_J=1} \boxed{\sum_{J=1}^{H} \lambda_J P(n) + \sum_{J: n_J=1} r_J(n) P(n) = \sum_{J: n_J=1} \lambda_J P(n_{0J}) + \sum_{J=1}^{H} p_{J0} r_J(n_{J0}) P(n_{J0}) + \sum_{J=1}^{H} \sum_{i: n_i=1} p_{Ji} r_J(n_{Ji}) P(n_{Ji})}$$

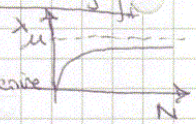
FREQUENZA EFFETTIVA ARRIVI: In una generica rete di code aperte, un pezzo può visitare una stazione J anche diverse volte prima di uscire dal sistema → il valore della frequenza media effettiva degli arrivi a J può essere superiore al valore λ_J che tiene conto solo degli arrivi dall'esterno $\boxed{\lambda'_J = \lambda_J + \sum_{K=1}^{H} \lambda'_K p_{KJ}}$

THROUGHPUT rappresenta la produttività, si misura in pezzi/unità di tempo

Per una generica rete di code aperta, il calcolo della relazione tra λ e N è laborioso ma ha qualitativamente lo stesso andamento (Ex M/M/1) → $N = \lambda/(\mu-\lambda)$ → ad aumenti del working process oltre un certo valore corrispondono aumenti del throughput sempre meno significativi. Il valore asintotico raggiungibile con un work-in-~~progress~~ process infinitamente alto è limitato dalla stazione di servizio meno efficiente di tutto il sistema chiamata collo di bottiglia μ_0 → capacità produttiva dell'intera rete $\boxed{\mu_0 = \min_J \left\{ \frac{s_J \mu_J}{v_J} \right\}}$

RETI CHIUSE → si dice tale se il numero di clienti che fluiscono nella rete rimane costante. Dal punto di vista operativo non appena un pezzo esce dal sistema viene subito rimpiazzato da un ~~nuo~~ nuovo pezzo entrante.

↳ Ex: il numero di pallet è limitato e quindi l'ingresso di un nuovo pezzo può avvenire solo quando un pallet occupato si ~~sed~~ rende disponibile



(!) N, indicherà il numero complessivo di pezzi nel sistema → non è più un valore atteso di una variabile aleatoria bensì un parametro di controllo

- Il numero di stati di una rete chiusa in cui circolano N clienti è evidentemente finito. Esso è pari a tutti i modi possibili di distribuire N oggetti identici tra H contenitori
  ↳ visto che il numero di clienti è limitato → ho sempre una distribuzione stazionaria di prob.

VISIT COUNT: $\boxed{v_J = \sum_{K=1}^{H} p_{KJ} v_K}$ → ha il significato di una variabile di riferimento in quanto gli altri v_i saranno relativi a tale v_J. Si fissa convenzionalmente a 1 la stazione I/O

$v_1 = 1$

in quanto si è certi che tale stazione verrà visitata una ed una sola volta da ciascun pezzo fisico entrante

EQ. DI EQUILIBRIO: un parametro importante è la quantità di tempo che mediamente un pezzo trascorre in servizio in un centro J. $\boxed{x_J = \frac{v_J}{\mu_J}}$

$P(n) \sum_{J=1}^{H} r_J(n)$ → valore atteso del numero di volte che si esce da tale stato

$$\boxed{P(n) \sum_{J=1}^{H} r_J(n) = \sum_{K: n_K=1} \sum_{J=1}^{H} p_{JK} P(n_{JK}) r_J(n_{JK})}$$

→ valuto il valore atteso del numero di volte che si entra nello stato n e considero quelli che differiscono da n per un sol pez

TEOREMA GORDON: costituisce il corrispettivo del teorema di JACKSON per le reti chiuse

$$P(n) = \frac{1}{G(N)} \prod_{J=1}^{H} f_J(n_J) \qquad f_J(n_J) = \begin{cases} \dfrac{x_J^{n_J}}{n_J!} & \text{per } n_J \le s_J \\[2ex] \dfrac{x_J^{n_J}}{s_J!\, s_J^{n_J - s_J}} & \text{per } n_J \ge s_J \end{cases} \qquad G(N) = \sum_{n} \prod_{J=1}^{H} f_J(n_J)$$

dove G(N) è una costante di normalizzazione tale che la somma delle probabilità sia pari a 1

- G(N) è la somma dei prodotti delle $f_J(n_J)$ per tutti gli stati n caratterizzati dal fatto di avere esattamente N pezzi → prodotto per ognuno dei modi di assegnare N pezzi a H macchine

→ $\boxed{G(J, n) = \sum_{K=0}^{n} f_J(K)\, G(J-1, n-K)}$ → è essenziale specificare il numero delle stazioni

G(J, n), la somma dei termini relativi a tutti i modi possibili di assegnare n pezzi alle prime J stazioni

$G(H,N) = G(H-1, N) + x_H\, G(H, N-1)$ → non dip. dalla numerazione dei stati

THROUGHPUT → nelle reti aperte in condizioni di stabilità è pari alla frequenza complessiva degli arrivi al sistema

↳ $\boxed{X = \frac{G(H, N-1)}{G(H, N)}}$ $\quad \boxed{B_J = x_J X}$ → valore atteso del numero di serventi attivi alla stazione J

prob. che nella stazione H vi siano esattamente K pezzi

$$\boxed{Pr(n_H = K) = f_H(K) \frac{G(H-1; N-K)}{G(H; N)}}$$

$\boxed{\lambda_J = X v_J}$ → freq. media degli arrivi alla staz. J

(!) OSS: se si fosse voluto conoscere la prob. di avere K pezzi in un'altra stazione J, avremmo dovuto rinominare le stazioni ponendo J come ultima stazione

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

FORMULARIO RETI DI CODE

CODE APERTE

$\boxed{N = \sum_{i=1}^{M} N_i}$ Numero di clienti nel sistema

$\boxed{N_i = \frac{\lambda'_i}{\mu_i - \lambda'_i}}$ Numero di clienti della stazione i-esima se è M/M/1

$\boxed{N_i = L_i + \frac{\lambda'}{\mu_i}}$ Numero di clienti nella stazione i-esima se è M/M/S

$\boxed{W = \sum_{i=1}^{M} W_i \cdot v_i}$ Tempo che impiega un pezzo per attraversare il sistema

$\boxed{W_i = \frac{1}{\mu_i - \lambda'_i}}$ Tempo per attraversare la stazione i (M/M/1)

$\boxed{W_i = \frac{L_i}{\lambda'_i} + \frac{1}{\mu_i} = \frac{N_i}{\lambda'_i}}$ Tempo per attraversare la stazione (M/M/S)

$\boxed{W_q = \sum v_i W_{q_i}}$ Tempo che un cliente attende in coda nell'intero sistema

$\boxed{W_{q_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda'_i} - \frac{1}{\mu_i}}$ Tempo in coda per una stazione M/M/1

$\boxed{W_{q_i} = \frac{L}{\lambda'_i}}$ Tempo in coda per una stazione M/M/S

$\boxed{X_{R_i}^{TUTTI} = \lambda'_i}$ $\boxed{X_{T_i}^{TUTTI} = S_i \mu_i}$ Produttività reale e teorica per tutti i pezzi

$\boxed{X_{R_i}^{FINITI} = X_R}$ $\boxed{X_{T_i}^{FINITI} = \frac{S_i \mu_i}{v_i}}$ Produttività reale e teorica per i pezzi finiti

$\boxed{X_R = \sum \lambda}$ Produttività reale del sistema

$\boxed{X_T = \min \left\{ \frac{S_i \mu_i}{v_i} \right\}}$ Produttività teorica del sistema

$\boxed{P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda'_J}{\mu_J}}$ (M/M/1) $\boxed{\rho = \frac{\lambda'}{S_J \mu_J}}$ (M/M/S)

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

M/M/∞ → $\boxed{L = 0}$ $\boxed{W_q = 0}$ $\boxed{N = \rho = \frac{\lambda}{\mu}}$ $\boxed{W = \frac{1}{\mu}}$

CODE CHIUSE (!) non valgono le leggi per i sistemi M/M/1 - M/M/S in quanto gli arrivi non sono esponenziali

$\boxed{x_i = \frac{v_i}{\mu_i}}$ Valore atteso del tempo speso in una stazione

$\boxed{W = \sum_{i=1}^{M} v_i W_i = \frac{N}{x_R}}$ Valore atteso del tempo impegato per attraversare il sistema

$\boxed{W_s = \sum_{i=1}^{M} x_i = \sum_{i=1}^{M} v_i W_s}$ Valore atteso del tempo di servizio del sistema

$\boxed{W_q = \sum_{i=1}^{M} v_i W_{q_i} = \frac{N}{x_R} - \sum_{i=1}^{M} x_i}$ Valore atteso del tempo in coda al sistema

$\boxed{W_i = \frac{N_i}{x_R}}$ Valore atteso del tempo impegato per attraversare una stazione

$\boxed{W_{s_i} = \frac{1}{\mu_i} \cdot v_i = x_i}$ Tempo di servizio di una stazione

$\boxed{W_{q_i} = \frac{N_i}{x_R} - x_i}$ Valore atteso del tempo speso in coda in una stazione

$\boxed{x_R = \frac{G(M, N-1)}{G(M,N)}}$ Produttività reale del sistema

$\boxed{x_T = \min\left\{\frac{s_i \mu_i}{v_i}\right\}}$ Produttività teorica del sistema

$\boxed{x_{R_i} = v_i x_R}$ → Produttività della stazione iesima reale

$\boxed{x_{T_i} = s_i \mu_i}$ → Produttività teorica della stazione iesima

$\boxed{P(n_M = K) = f_M(K) \cdot \frac{G(M-1, N-K)}{G(M,N)}}$ Prob. che nell'ultima stazione ci sono K clienti

$\boxed{N_M = \sum_{K=1}^{N} K \cdot P(n_M = K) = \sum_{K=1}^{N} K \cdot f_M(K) \cdot \frac{G(M-1, N-K)}{G(M,N)}}$

$\boxed{L_i = N_i - x_i \cdot x_{R_i}}$