Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

# Analisi dei Sistemi Ad Eventi

Analisi dei sistemi ad eventi — dispense AUTOMAZIONE INDUSTRIALE

SISTEMA: Ente fisico che risponde alle sollecitazioni esercitate da una certa azione producendo una reazione

→ Per sviluppare tecniche di progetto, di controllo e/o di valutazione delle prestazioni di un sistema, sulla base di specifiche predefinite è necessaria una definizione QUANTITATIVA → Modello FORMALE

→ SISTEMA AD EVENTI DISCRETO: può essere considerato come un sistema dinamico ed è caratterizzato dall'accadimento asincrono d'eventi che individuano lo svolgimento di attività di durata non necessariamente note

MODELLO MATEMATICO (SED) in grado di rappresentare l'insieme delle tracce degli eventi che possono essere generate da un sistema. Le tracce possono essere rappresentate con due diversi livelli di astrazione sulla base dei quali si distinguono:

→ (1) MODELLI LOGICI: la traccia degli eventi è costituita semplicemente da una sequenza di eventi $\{e_1, e_2 \ldots\}$, in ordine di occorrenza, senza alcuna informazione circa i tempi di occorrenza degli eventi

→ (2) MODELLI TEMPORIZZATI: la traccia degli eventi è costituita da una sequenza di coppie $\{e_1 t_1; e_2 t_2, e_3 t_3 \ldots\}$ dove ogni evento $e_i$ è accoppiato al suo tempo di accadimento

→ rendono agevole lo studio delle proprietà qualitative del sistema e consentono quindi di effettuare l'analisi strutturale di un SED

→ permettono di studiare i diversi comportamenti nel tempo del sistema sono pertanto indispensabili, qualora si voglia effettuare l'analisi PRESTAZIONALE

Nella formulazione di un modello logico bisogna specificare l'insieme delle traiettorie ammissibili → sequenze fisicamente realizzabili

→ ADATTI PER QUESTO (1) AUTOMI (2) RETI DI PETRI

(!) La necessità di modelli per descrivere il funzionamento dei sistemi è una costante di tutti i problemi di INGEGNERIA → non è possibile progettare alcunché se non si dispone di un modello adeguato

→ L'evoluzione di questi sistemi può essere studiata in termini di cambiamento delle condizioni logiche di funzionamento discrete + FUNZIONAMENTI TIPICI:
- evoluzione parallela e asincrona
- presenza di scelte (bivio)
- condivisione di risorse

SISTEMI DINAMICI: si suddividono in

a) sistemi dinamici a tempo continuo o discreto l'evoluzione è guidata dal tempo
b) sistemi dinamici ad eventi discreti, l'evoluzione è guidata dall'accadimento degli eventi, considerati per semplicità istantanei, che accadono ad intervalli irregolari non noti a priori
c) sistemi IBRIDI l'evoluzione è determinata sia dal tempo che dagli eventi

→ le variabili di stato assumono valori numerici discreti
→ gli stati cambiano in corrispondenza dell'occorrenza di eventi

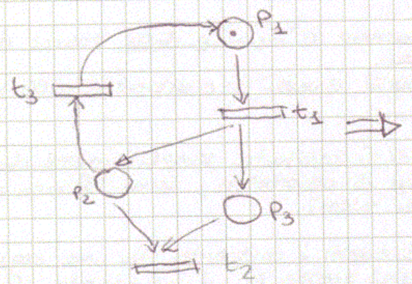
(!) Quando affrontiamo questo approccio non ci interessa sapere lo stato di transizione, ma se un evento accade prima o dopo un altro → eliminando la temporizzazione, stiamo di fatto modellando il comportamento logico del sistema
UN MODELLO LOGICO DI QUESTO TIPO CONSENTE:
- distinguere le sequenze di eventi che sono compatibili con delle specifiche di comportamento
- verificare se un determinato stato è raggiungibile e con quale sequenza di eventi
- verificare se il sistema si blocca in uno stato

In tegrazione: dispense II

Una rete di PETRI è un GRAFO BIPARTITO; in cui ci sono due tipi di nodi (i posti rappresentati con dei cerchi e le transizioni rappresentate con barre) collegati tra loro mediante archi orientati

GRAFO DI COPERTURA: → si introduce questo grafo quando ho a che fare con una rete non limitata
- si introduce il simbolo $\omega$ per indicare un numero intero non limitato di gettoni in un posto

Ex



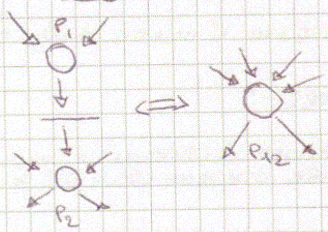

$\Longrightarrow$

$$
\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \arrow[r, "t_1"] & \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t_3"] & \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} & \\
& \begin{bmatrix}1\\0\\\omega\end{bmatrix} \arrow[r, shift left, "t_1"] & \begin{bmatrix}0\\1\\\omega\end{bmatrix} \arrow[r, "t_2"] \arrow[l, shift left, "t_3"] & \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}
\end{tikzcd}
$$

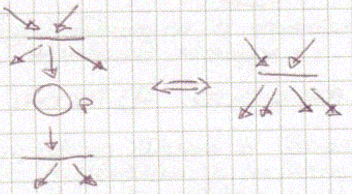
PROPRIETÀ FONDAMENTALI: ① LIMITATEZZA: tutte le risorse del sistema (buffer, macchine, ) sono limitate. ② VIVEZZA: si vuole evitare che il processo produttivo si interrompa e si vuole far sì che tutte le attività rappresentate nel modello possano essere eseguite ③ REVERSIBILITÀ: occorre assicurare la ripetibilità del processo produttivo.

METODI DI RIDUZIONE

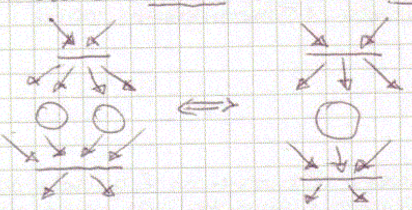
FUSIONE POSTI CONNESSI IN SERIE



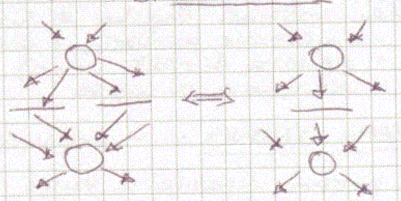

FUSIONE DI TRANSIZIONI IN SERIE



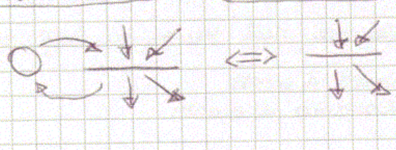

FUSIONE DI POSTI CONNESSI IN PARALLELO



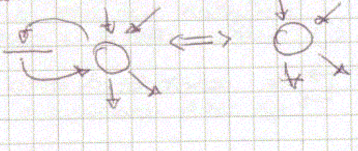
FUSIONE DI TRANSIZIONI IN PARALLELO



ELIMINAZIONE DI AUTOANELLI:



ELIMINAZIONI DI AUTOANELLI DI TRANSIZIONI



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher



Analisi e sistemi ad eventi

Lezione I
11/10/11

sistemi che evolvono → legati agli eventi (analizzo il sistema solo se cambia qualcosa)

stato del sistema : variabili che ci dicono come si evolve il sistema

RETI DI PETRI : modello logico che mi dice il funzionamento sistemi ad eventi discreti
RETI DI CODE

posso avere un modello temporizzato , ~~son~~ so come e quando cambia

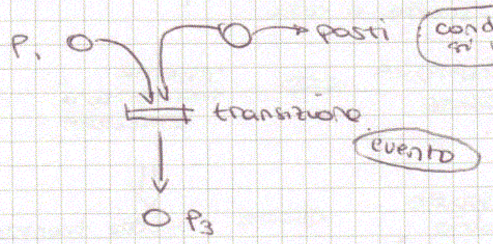
RETI DI PETRI : sono un formalismo per rappresentare i sistemi DES (ad eventi discreti)
automi : devo rappresentare tutte le evoluzioni di stato
In generale sono strutture estremamente più compatte degli automi. (le reti di petri)

→ si presentano in modo particolare per rappresentare comportamenti complessi

- la sincronizzazione
- conflitto

→ rappresentazione grafica
rappresentazione matematica (matriciale)
lo stato di un modello e la transizione da uno stato all'altro sono concetti distribuiti ⇒ compattezza
non c'è esplosione dimensionale

la rete di PETRI è un grafo bipartito in cui ci sono due tipi di nodi collegati tra loro mediante archi orientato




condizioni affinché l'evento si verifichi

lo stato è associato alla marcatura

il preset di un nodo della rete di Petri è l'insieme di nodi immediatamente a monte (prima)

questa definizione deve avere inoltre (per far evolvere)

- MARCATURA : ogni posto contiene un numero di gettoni
- FUNZIONE PESO : ogni arco è attribuito un numero intero non negativo

→ la marcatura ~~è un vettore~~ è un vettore ci dice il numero di gettoni in un posto

dato un sistema non esiste un solo modello

(!) sia gli automi che le reti di PETRI rappresentano il meccanismo di transizione di un sistema ad eventi discreti
- negli automi il meccanismo è rappresentato esplicitamente
- la struttura di una rete PETRI è più ricca e compatta

Un evento è caratterizzato da due attributi
- la possibilità che esso accada → abilitazione di una transizione
- l'effetto del suo accadimento sul sistema → scatto di una transizione

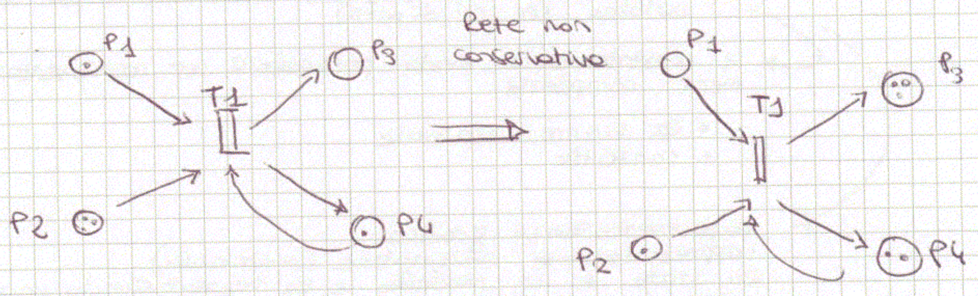
abilitazione di una transizione:
- perché una transizione possa scattare devono essere verificate alcune condizioni, che dipendono dal peso degli archi in ingresso alla transizione e dalla marcatura dei posti in ingresso alla transizione
- i posti in ingresso a una transizione sono associati a pre-condizioni

↳ lo scatto abilita il consumo dei gettoni in base al peso dell'arco che congiunge la transizione al posto
  - l'effetto di scatto cambia la marcatura

la condizione sim di abilitazione si indica con $M[t>$

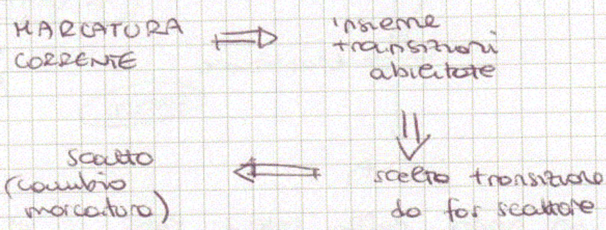
definizione: lo scatto di una transizione t abilitata nella marcatura M porta la rete in uno stato nuovo $M^*$, ottenuto rimuovendo da ogni posto a monte di t e aggiungendo ad ogni posto a valle di t un numero di gettoni pari al peso dei corrispondenti archi collegati

Ex




i gettoni rimangono in ingresso per tutta la durata della transizioni
- lo scatto di una transizione è indivisibile

→ Nelle reti standard si assume per convenzione che scatti una sola transizione, scelta a caso



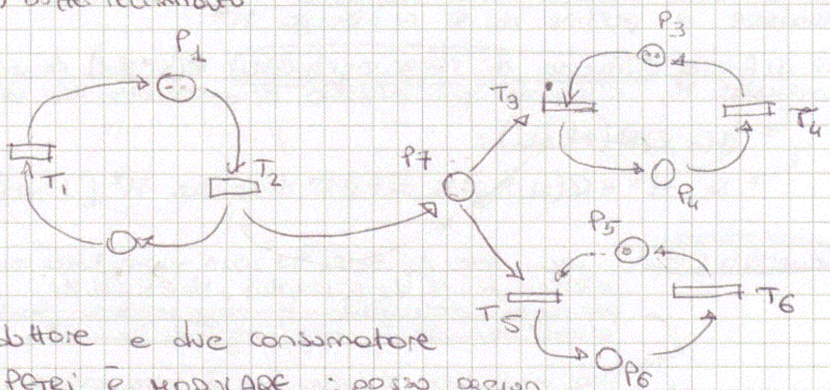

LE RETI DI PETRI SONO UTILIZZATE IN DUE MODI:
① strumento ausiliario di analisi: si modellizza il sistema con una rete di Petri e si analizza quest'ultima per verificare la correttezza del progetto del sistema
② strumento diretto di progetto: l'intero processo di specifica e progetto viene svolto reti di petri

Analisi e sistemi ad eventi

Lezione II
14/10/11

Le transizioni non possono scattare tutte insieme perché mi perdo gli stati se scattassero tutte insieme

Buffer: coda → posto in cui si producono i gettoni (P7) buffer illimitato

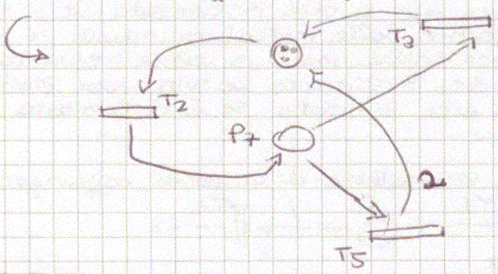



ho un produttore e due consumatore

(1) La rete di Petri è MODULARE: posso aggiungere e modellare i pezzi

i produttori sono due (quelli posti in P1)

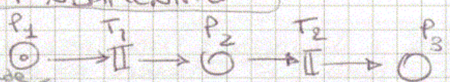
per limitare il buffer in P7



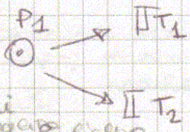

LIMITAZIONE BUFFER

STRUTTURE MODELLISTICHE FONDAMENTALI

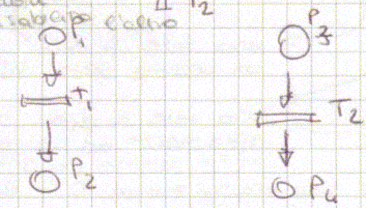
- TRANSIZIONE IN SEQUENZA
  $t_1$ e $t_2$ si dicono in sequenza, e $t_1$ precede $t_2$ in una data marcatura, se $t_1$ scatta scatta anche $t_2$



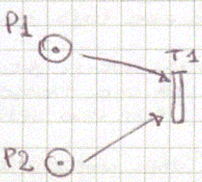

- CONFLITTO STRUTTURALE:
  se hanno almeno un posto d'ingresso comune

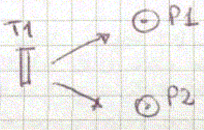



- CONFLITTO EFFETTIVO → particolare
  stato conflitto strutturale → se due transizioni sono entrambe abilitate ma lo scatto di una disabilita l'altra
- CONCORRENZA STRUTTURALE
  se non condividono nessun posto in comune




- SINCRONIZZAZIONE: strutture legate al concetto di concorrenza sono la transizione di sincronizzazione e quella di inizio concorrenza



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

PROPRIETÀ BASE RETI PETRI

① La prima proprietà che ci interessa è se sia possibile ottenere una data marcatura (un determinato stato) a partire da un'altra. Ad esempio può essere richiesto di verificare se una marcatura che causa un blocco del sistema (dead lock) sia raggiungibile dalla marcatura corrente

② Una marcatura $M^*$ si dice raggiungibile a partire da una data marcatura $M$ se esiste almeno una sequenza di transizioni tali che facendole scattare a partire da $M$ si ottenga $M^*$

③ Si definisce insieme di raggiungibilità $R(N, M_0)$ di una rete $N$ con marcatura iniziale $M_0$, l'insieme più piccolo di marcature tali che:

- $M_0 \in R(N, M_0)$ e
- se $M^* \in R(N, M_0)$ e $\exists t \in T$ tale che $M^*[t>M^{**}$, allora $M^{**} \in R(N, M_0)$

④ Reversibilità: una rete di Petri $N$ con marcatura iniziale $M_0$, è detta reversibile se $\forall M \in R(N, M_0)$, $M_0 \in R(N, M)$

~~per ogni marcatura M raggiungibile da $M^*$ raggiungibile da $M_0$ si ha che M è raggiungibile da $M^*$~~

Una marcatura $M$ della rete è detta essere uno HOME STATE se $\forall M^* \in R(N, M_0)$, $M \in R(N, M^*)$ (ovvero per ogni marcatura $M^*$ raggiungibile da $M_0$ si ha che $M$ è raggiungibile da $M^*$)

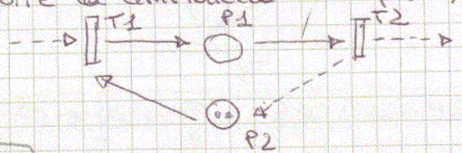
~~Nei~~ processi di produzione consistono di sequenze cicliche di operazioni, al termine delle quali si torna in uno stato iniziale

⑤ Limitatezza: un posto p di una rete si dice K-limitato, se in tutte le marcature raggiungibili a partire dalla marcatura iniziale il numero di gettoni presenti nel posto non supera mai un valore prefissato K

- Una rete si dice K-limitata se tutti i suoi posti sono K-limitati
- Una rete si dice limitata se è K-limitata per qualche valore di K

(!) si può sempre imporre la limitatezza di un posto, aggiungendo un posto complementare

Ex




⑥ Binarietà o Sicurezza: una rete K-limitata con $K = 1$ si dice binaria o sicura
→ ogni posto può contenere al più un gettone

⑦ Conservatività: una rete con marcatura iniziale $M_0$ si dice conservativa con riferimento ad un vettore peso $W = [w_1\ w_2 \dots w_{|P|}] \geq 0$ se $\forall M \in R(N, M_0)$ vale l'equazione

$$\sum_i w_i m_i = \sum_i w_i m_{0i}$$

→ una rete si dice (assolutamente) conservativa se è conservativa con riferimento ad un vettore peso $W > 0$

→ Una rete si dice strettamente conservativa se è conservativa con riferimento ad un vettore peso $W = [1\ 1 \dots 1]$
← se la somma dei gettoni è costante

se la somma dei gettoni è costante

⑧ Vivezza: Una transizione t si dice viva se e solo se per ogni marcatura M, raggiungibile dalla marcatura iniziale, esiste una marcatura $M^*$ raggiungibile da essa tale che t è abilitata in $M^*$

→ una rete si dice viva se e solo se tutte le sue transizioni sono vive
- una transazione viva può scattare infinite volte
- in una rete viva tutte le transizioni possono scattare infinite volte

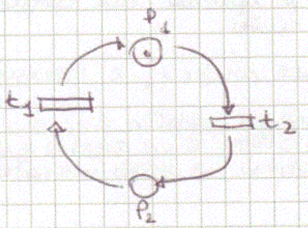
- Una marcatura M si dice viva se e solo se per ogni transizione t esiste una marcatura $M^*$ raggiungibile da M tale che t è abilitata in $M^*$
- Una rete è viva <=> tutte le sue marcature raggiungibili a partire dalla marcatura iniziale sono vive
- Una marcatura M si dice morta se e solo se nessuna transizione è abilitata

Onalisi sistemi ad eventi

lezione III

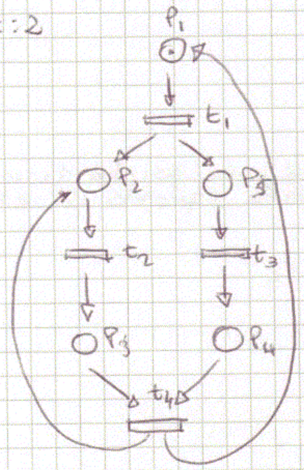
18/10/11

STRETTAMENTE CONSERVATIVA: poichè le numero degli archi entranti pesati è uguale a quello degli archi uscenti




- e l'insieme di raggiungibilità è 0,1
- è strettamente conservativa poiche la somma dei gettoni in ogni transizione è uguale a 1
- è una rete binaria poichè ogni $p^0$ e $K=1$ limitato
- è una rete viva ⊳ la rete di p.e.m. è un grafo marcato in cui ogni ciclo contiene un posto marcato

Ex : 2



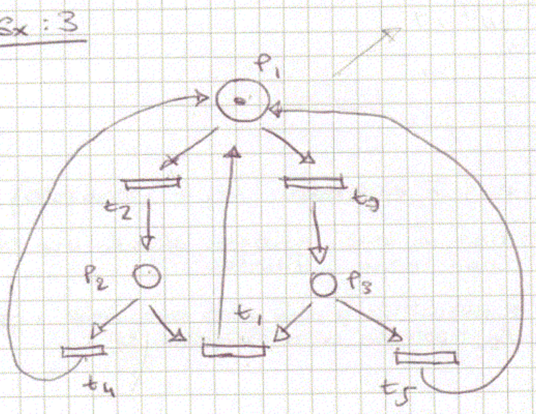

→ non può essere reversibile in quanto non posso ritornare alla marcatura iniziale

→ non è limitato poichè $P_2$, $P_3$ sono illimitati

→ è vivo poichè può scattare infinite volte

→ $P_2$ è un BUFFER

Ex : 3



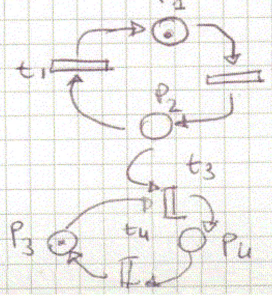

- è strettamente conservativa poiche $t_1$ non viene abilitato
- è limitata quindi non è viva

TRE SOLI STATI

$M_0 = [1,0,0]^T$ $M_1 = [0,1,0]^T$

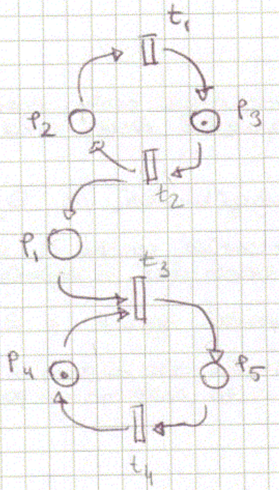
$M_2 = [0,0,1]^T$

Ex : 4




- è limitata e quindi non è viva
- non è REVERSIBILE, se scatta $t_3$, non si riesce più a marcare $p_1$

Ex : 5



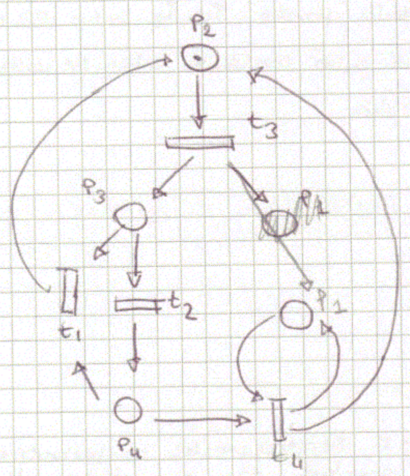

- è reversibile
- è conservativo rispetto ad un vettore (0, 1, 1)

IL VETTORE PESO : è quello che contiene i posti del ciclo

- non è limitato poiché $p_1$ è illimitato

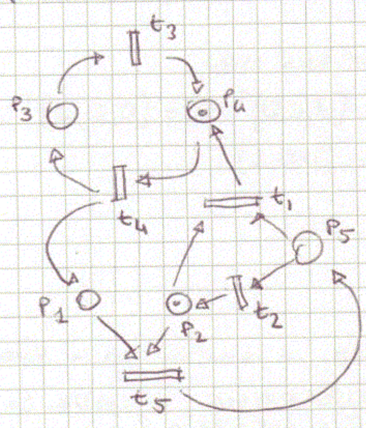
→ la rete rappresenta un modello produttori - consumatori poiché la rete di Petri è un GRAFO già marcato e ogni ciclo contiene un posto marcato, la rete è viva

Ex : 6




- la rete non è viva poiché $t_1$ non è mai abilitato
- non è reversibile (quando la rete è ~~limitata~~ illimitata)
- è illimitata $P_1$

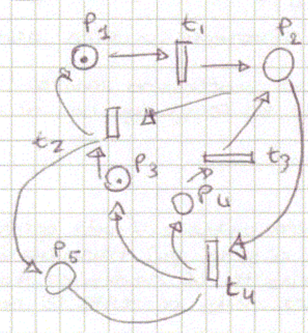
ex : 7




- non è limitata ($p_1$ è illimitato)
- non è viva quando almeno una transizione non viene attivata
- è reversibile poiché posso consumare i gettoni in $p_1$, ripetendo la ~~seq~~ sequenza $t_5, t_2$

Analisi sistemi ad eventi — FERRARINI POLITECNICO MILANO — Lezione III

ex: 8 — 18/10/11




- è limitata perchè non ci sono buffer
- è vivo tutte le transizioni possono scattare almeno una volta
strettamente conservativa: la somma ~~degli~~ delle marcature deve essere ~~ee~~ uguale
- non è reversibile

Inizialmente può scattare solo $t_2$. Poi è consentito solo la sequenza ripetuta $t_2, t_1, t_4, t_3$

ANALISI DINAMICA: evoluzione della rete → grafo di raggiungibilità (a partire dalle condizioni iniziali)
Il grafo di raggiungibilità è l'automa corrispondente alla rete di PETRI marcata
→ Il numero di stati può essere elevato

ANALISI STRUTTURALE: strutture algebriche, dipende solo dalla matrice incidenza, cioè tipologia della rete

GRAFO di raggiungibilità: si definisce grafo di raggiungibilità di una rete N con marcatura iniziale $M_0$, è ~~un~~ grafo in cui
- i nodi sono associati agli elementi $R(N, M_0)$
- gli archi sono associati alle transizioni che portano da una marcatura ad un altra di $R(N, M_0)$

Caratteristiche
- non deterministici

Tecnica di costruzione: vado prima in profondità e poi torno in dietro

PROPRIETÀ:

- numero finito di stati → limitatezza
- non esistono stati associati a marcature con più di un gettone per posto → rete binaria sicura
- a partire da ciascun nodo del ~~grado~~ grafo esiste un cammino contenente

~~TECNICA~~

Caratteristiche:
- Il grafo di raggiungibilità è un automa
- Tale automa non ha in generale un numero finito di stati, poichè qualche posto della rete può contenere un numero illimitato di gettoni
- Ci possono essere nodi con più archi uscenti (non deterministico)
→ l'automa può essere non deterministico in quanto sono possibili più archi uscenti da un nodo

In generale con il GRAFO DI STATO è POSSIBILE VERIFICARE:
- la raggiungibilità di una marcatura
- l'ammissibilità di una sequenza di scatti

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

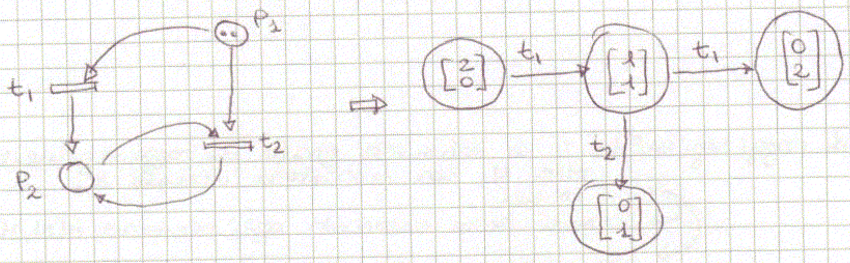
LE PROPRIETÀ di una rete di PETRI possono essere facilmente verificate per ispezione del grafo di raggiungibilità:

- → numero di stati finito → limitatezza (boundedness)
- → non esistono stati associati a marcature con più di un gettone per posto → rete binaria/sicura (SAFENESS)
- → a partire da ciascun nodo del grafo esiste un cammino contenente un arco associato ad ogni transizione → vivezza (LIVENESS)
- → se esiste un nodo senza archi uscenti, esso corrisponde ad una marcatura morta (deadlock)
- → a partire da ciascun nodo del grafo esiste un cammino che lo congiunge con il nodo iniziale reversibilità

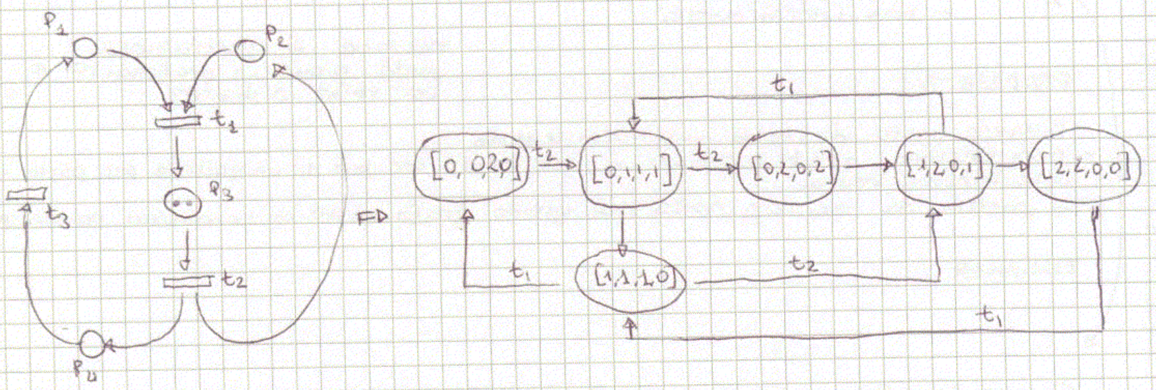
COSTRUZIONE GRAFO DI RAGGIUNGIBILITÀ:

1. Disegno un nodo contrassegnato $M_0$ associato alla marcatura iniziale (nodo corrente)
2. Sia $M_k$ la marcatura associata al nodo corrente, se non ci sono più transizioni attivabili a partire da $M_k$ e non considerate in precedenza con riferimento al medesimo nodo, allora se $k>0$ (il nodo corrente non è associato a $M_0$) si definisce nodo corrente il nodo associato a $M_{k-1}$, altrimenti l'algoritmo termina
3. Sia $M_k$ la marcatura associata al nodo corrente. Si segue la prima transizione che può scattare a partire da $M_k$ e si calcola la marcatura raggiunta con il suo scatto. Se tale marcatura non appartiene all'insieme $\{M_i, i=0,1,..,k\}$ la si chiama $M_{k+1}$ e si crea un nodo associato ad essa che diventa il nuovo nodo corrente. Si disegna un arco che va dal nodo associato a $M_k$al nodo corrispondente alla marcatura raggiunta con lo scatto della transizione e si contrassegna l'arco con l'etichetta della transizione
4. Si ripete l'operazione ②

Ex 1




Ex 2:

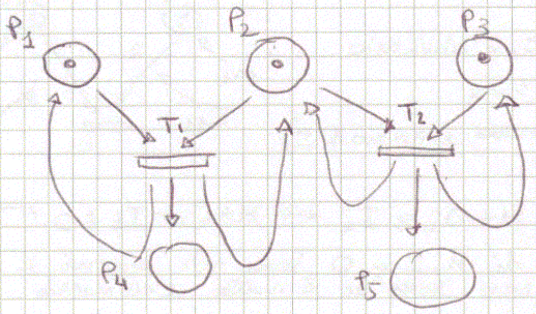


Analisi sistemi ad eventi — lezione IV — 21/10/11

COSTRUZIONE DEL GRAFO DI STATO : ci fa vedere l'evoluzione

il grafo di stato non è deterministico, quando ho una risorsa condivisa.

se ci capita un grafo di stato di una rete infinita (l'algoritmo non termina)
↳ metto il simbolo $\Omega$ (va da 1 a $\infty$)




(!) se ho un ciclo mi prendo quel posto per trovare il vettore

INPUT: ○ → | (archi entranti nelle transizioni)

OUTPUT: | → ○ (archi uscenti dalle transizioni)

È possibile analizzare le reti di Petri attraverso una rappresentazione matematica
↳ basata sulla definizione di 3 matrici (I, O, C) e di una coppia di vettori che rappresentano lo stato e l'evoluzione
↳ rappresenta sia la topologia (comportamento "statico") sia l'evoluzione (comportamento dinamico)

(!) le matrici di ingresso (I) e uscita (O) riassumono la topologia della rete

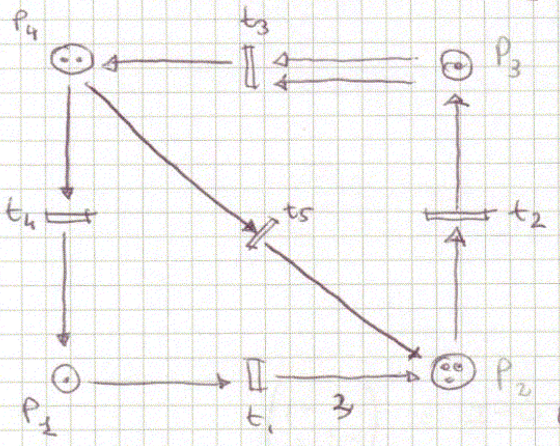
(!) Le righe sono associate ai posti, le colonne alle transizioni. Inoltre so che gli elementi I e O sono interi non negativi

MATRICE INCIDENZA

$\boxed{C = O - I}$

- Se non ci sono autoanelli, non esistono elementi omologhi diversi da 0
- una rete senza autoanelli si dice PURA

VETTORE MARCATURA: $M = [m_1 m_2 \dots m_{|P|}]^T$, dove $m_i$ è il numero di gettoni del posto p




MATRICE I (○ → |)

$$I = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

MATRICE O (| → ○)

$$O = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

Similitudine tra reti di Petri e sistemi dinamici

- marcatura ↔ stato
- $M^* = M + C_j$ ↔ equazione di moto

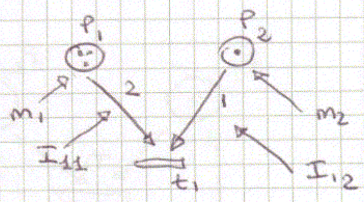
Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

$$C = O - I = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 3&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1&0&0&1&0 \\ 3&-1&0&0&1 \\ 0&1&-2&0&0 \\ 0&0&1&-1&-1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \end{array}$$

$M_0 = [1,3\ 1\ 2]^T$

CONDIZIONE DI ABILITAZIONE $\quad t_i$ è abilitato se $M \geq I_i$ (colonna $i$-ennma di $I$)




Per le reti pure : $M \geq I_i \Leftrightarrow M + O_i \geq I_i \longleftrightarrow M + O_i - I_i \geq 0 \longleftrightarrow M + C_i \geq 0$

questo perchè gli elementi di $M$, $I$ e $O$ sono non negativi e un elemento di $O$ può essere diverso da zero solo se è nullo l'elemento omologo di $I$

SCATTO DI UNA TRANSIZIONE : $\rightarrow$ produce $M^* = M + O_i - I_i = M + C_i$

$C_i = C \cdot S_i \qquad S_i = [0 \dots 0\, 1\, 0 \dots 0]^T$ è il versore con 1 nella $i$-esima posizione

Una sequenza di Transizioni non è necessariamente una sequenza di scatti

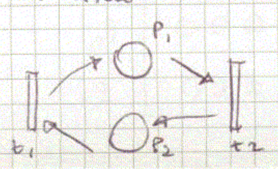
un modo più veloce per il calcolo della marcatura $M^*$

$$M^* = M + C_{k_1} + \dots + C_{k_n} = M + C \cdot (s_{k_1} + \dots + s_{k_n})$$

Il vettore delle occorrenze $s$, associato ad una sequenza di scatti $S = t_{k_1}, t_{k_2}$ è un vettore colonna di dimensione $|T|$, il cui generico elemento $i$-esimo è pari al numero di occorrenze della transizione $t_i$ nella sequenza $S$: $S = S_{k1} \dots t_k$

EQUAZIONE DI STATO : $\boxed{M [S > M^* \Rightarrow M^* = M + C_s]}$ l'equazione di stato non considera esplicitamente il problema dell'abilitazione delle transizioni

Ex P-invariante




$$C = O - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^T C = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

V lezione
25/10/11

Analisi dei sistemi ad eventi

# ANALISI STRUTTURALE

un alternativa all'analisi basata sul grafo di raggiungibilità è l'analisi strutturale
→ si basa solo sulle informazioni contenute nella matrice di incidenza
- dipendono dalla topologia della rete
- non dipendono dalla marcatura della rete

L'individuazione di strutture particolari in una rete di PETRI:
- fornisce un modo per analizzarne il comportamento

STRUTTURE FONDAMENTALI:
- IN VARIANTI
  - → Invarianti di posto o P-INVARIANTI
  - → Invarianti di transizione o T-INVARIANTI

} rappresentano generalmente proprietà che si conservano durante l'evoluzione della rete.

SIFONI O TRAPPOLE: hanno un ruolo centrale per l'analisi di vivezza della rete e in particolare per l'individuazione di eventuali stati di blocco della rete. (dead lock)

## – P-INVARIANTI –

sono associati ad insiemi di posti in cui la somma pesata dei gettoni si mantiene costante per tutte le marcature raggiungibili della rete
→ è individuato da un vettore colonna di numeri interi delle stesse dimensioni del vettore marcatura, i cui elementi sono i "pesi" della somma pesata

definizione: si definisce P-invariante di una rete N un vettore colonna x di dimensione |P| tale che

$$x^T M = x^T M_0, \quad \forall M \in R(N, M_0)$$

(!) tanti elementi quanti sono i posti

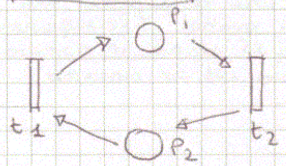
– FORMULA DI CALCOLO DELLE P-INVARIANTI –

Equazione di Stato $\Longrightarrow$ $M = M_0 + C s$ $\qquad x^T M = x^T M_0 + x^T C s$

inoltre se x è un p-invariante $x^T M = x^T M_0$

$\boxed{x^T C s = 0}$ $\forall s \neq 0$ oppure $C^T x = 0$

Ex:



$C = O - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$

$x^T C = 0$

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = x_2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 + (-1) \\ -1 + 1 \end{matrix} = 0$

## – T-INVARIANTI –

sono associati a possibili sequenze di scatti che riportano la rete nella marcatura iniziale
- Un T-invariante è rappresentato da un vettore colonna di numeri interi ed ha tanti elementi quante sono le transizioni
  → i cui elementi rappresentano il numero di volte in cui ogni transizione deve scattare per riportare la rete nella marcatura iniziale

(!) T-invariante può avere solamente elementi non negativi

definizione: si definisce T-invariante di una rete N un vettore colonna y di dimensione |T| tale che

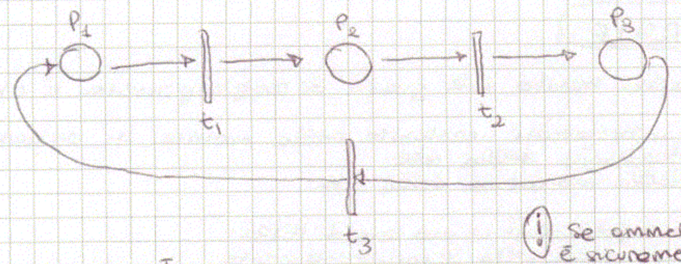
$\boxed{C y = 0}$ $\iff$ $M = M_0 + C y = M_0$

(!) → l'esistenza di un T-invariante non implica l'esistenza di una sequenza ammissibile tale che il vettore delle occorrenze associato coincida con il T-invariante

ATTENZIONE IL PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO

(!) Se la rete di PETRI non ammette nessun T-invariante è sicuramente non reversibile

Ex




$y = [1\ 1\ 1]^T$ è un T-invariante

(!) se ammette un P-INVARIANTE è sicuramente conservativa

- le soluzioni $x^T C = 0$
  - soluzione nulla → non serve
  - infinite soluzioni : la combinazione lineare $x = k_1 x_1 + k_2 x_2$

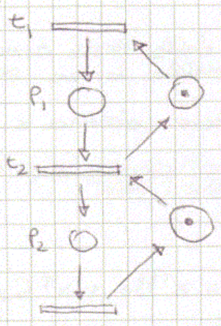
Per determinare il più piccolo insieme di P-invarianti da cui si possono generare tutte le soluzioni

→ il supporto di un P-invariante è l'insieme $\|x\|$ dei posti corrispondenti ad elementi non nulli di x

- SUPPORTO MINIMO : se il suo supporto non contiene quello di nessun altro P-invariante della rete

→ canonico : è detto tale un P-invariante, se il massimo comun divisore dei suoi elementi non nulli è pari a 1

Ex




$x_A = [1\ 0\ 1\ 0]^T$ è P-invariante $\|x_A\| = \{P_1, P_3\}$
$x_B = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ " " $\|x_B\| = \{P_2, P_4\}$
} SUPPORTO MINIMO CANONICI

$x_C$ è un P-invariante canonico, ma non a supporto minimo
↳ $x_C = [1\ 1\ 1\ 1]^T$

$x_D = [3\ 0\ 3\ 0]^T$ supporto minimo ma non canonico

P-INVARIANTI POSITIVI tutti i suoi elementi sono non negativi

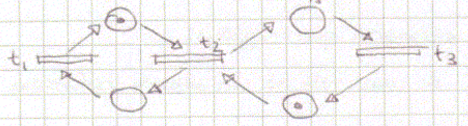
↳ identifica un insieme di posti in cui si conserva la somma dei gettoni o comunque una loro combinazione lineare a coefficienti positivi (componente conservativa)

- ci dice inoltre l'intervallo in cui può variare il numero complessivo di gettoni nell'insieme, da un minimo ad un massimo

PROPRIETÀ ULTERIORI

- si dice COPERTA da P-invarianti se ogni posto della rete appartiene al supporto di almeno un P-invariante
- una rete si dice conservativa se è coperta da P-invarianti positivi : ovvero $\forall p \in P, \exists$ un P-invariante $x \geq 0$ tale che $p \in \|x\|$
- RETE CONSERVATIVA : è una rete che ammette un P-invariante positivo, con supporto pari all'intero insieme di posti
- UNA RETE CONSERVATIVA ⇒ è limitata

Ex :




P-invarianti : $[1\ 1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 0\ 1\ 1]^T$
→ sincronizzazione tra due processi

gli elementi sono detti P-INVARIANTI MINIMI

INSIEME GENERATORE DI P-INVARIANTI POSITIVI : è il più piccolo insieme di P-invarianti positivi $PI_k$ $1 \leq K \leq q$ tale che ogni altro P-invariante della rete è ottenibile tramite combinazione lineare degli invarianti $PI_k$

- P-INVARIANTE È MINIMO ⟺ è canonico e a supporto minimo
- L'insieme generatore di P-INVARIANTI è finito e unico

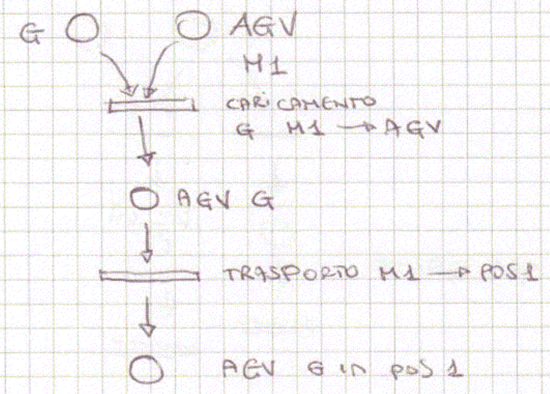
Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

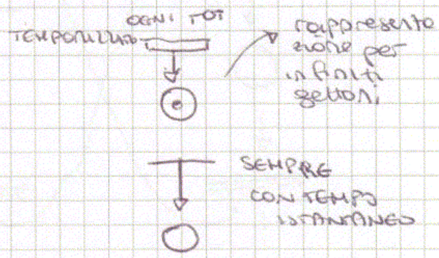
VI lezione
26/10/11

Analisi dei sistemi ad eventi

(!) rappresentare le attività con una sola transizione, cioè quindi ignorando le condizioni di attività in corso
↳ questa cosa non la devo assolutamente fare quando ho risorse condivise

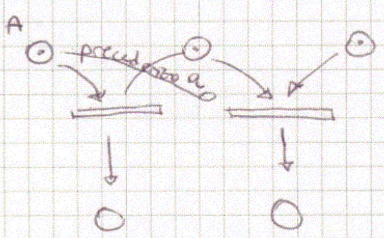
METODO PIÙ ELEGANTE



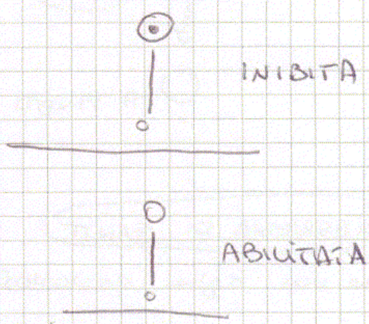




Come risolvere un conflitto.

CONFLITTO POTENZIALE



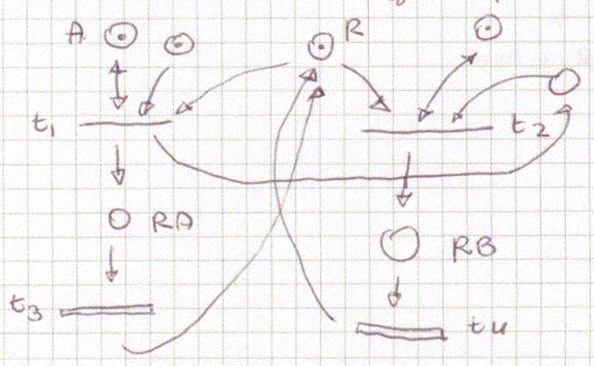

ARCO INIBITORE
(inibisce la transizione)




RISOLUZIONE CONFLITTI

per dare la precedenza ad a uso l'arco inibitore

CONTROLLORE SUPERVISORE: aggiunta posti esterni.

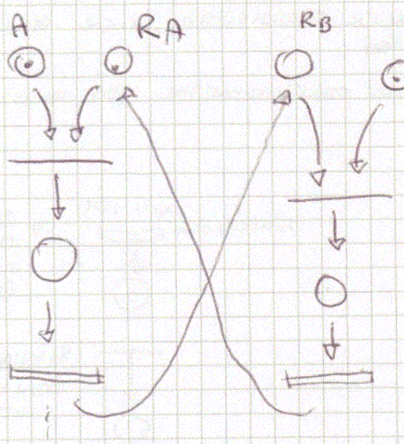



* mi risolve il conflitto

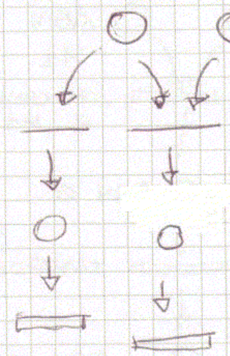
Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

METODO ALTERNATIVO




quando c'è un conflitto bisogna modellare con un istantaneo ed una temporizzato. (TRANSIZIONI)



ESERCIZIO D'ESAME : PETRI E ~~GRA~~ GANTT

posto - posto non è possibile

ELABORAZIONE : MACCHINA - OGGETTO

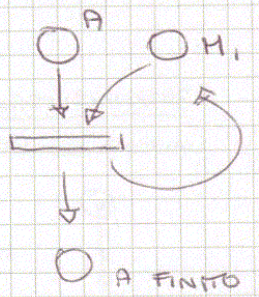
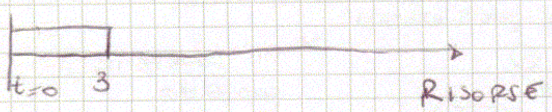



DIAGRAMMA DI GANTT

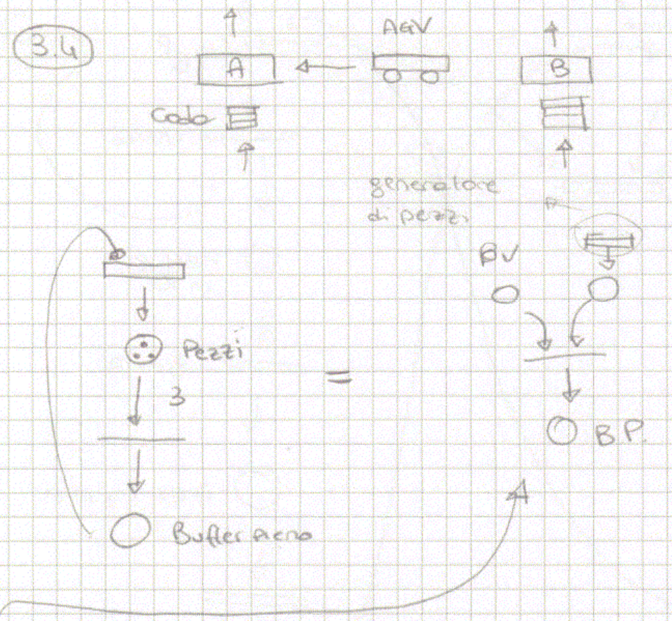
ho una righa orizzontale per ogni risorsa

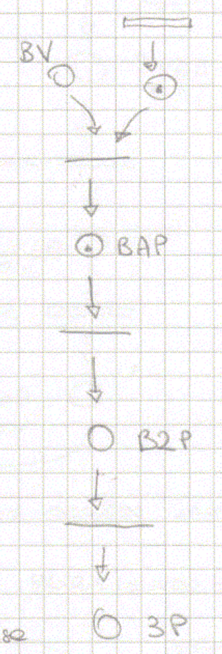


Analisi dei sistemi ad eventi

VII lezione
2/11/11

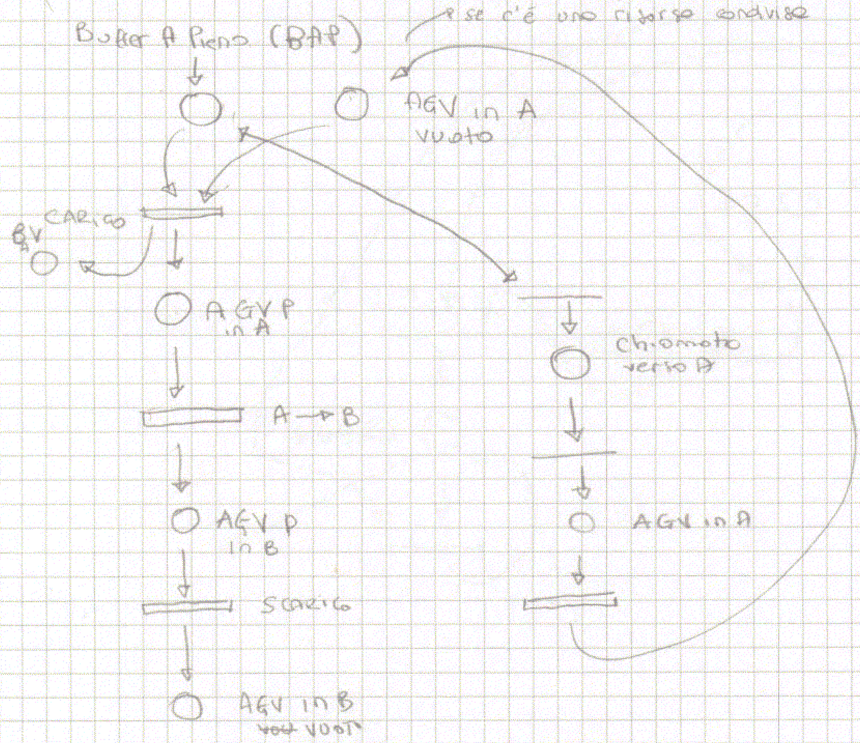
(3.4)



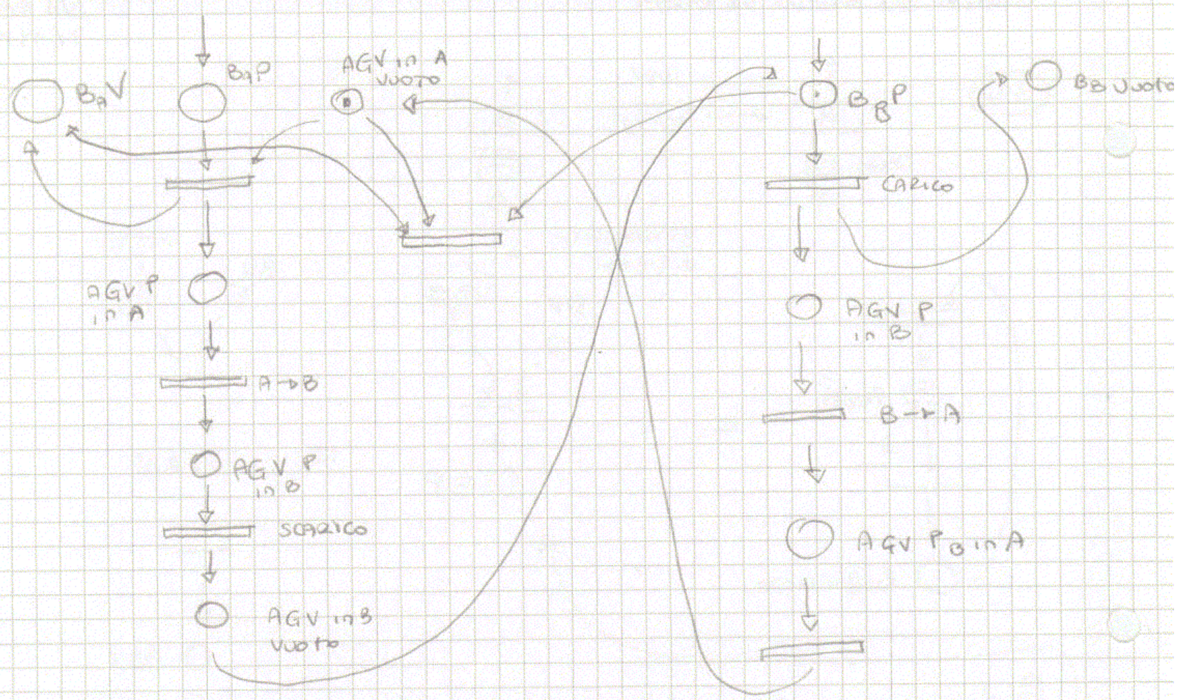




(!) l'operazione è trascurabile rispetto a quello che ci sta dopo (messa istantanea)

non c'è conflitto anche se c'è una risorsa condivisa

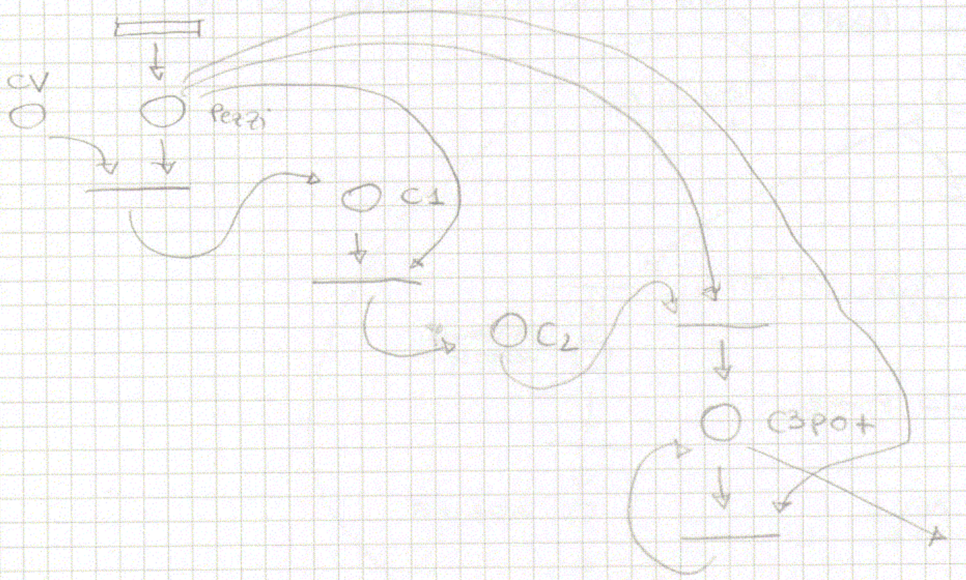


Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012




più transizioni possono avere lo stesso nome

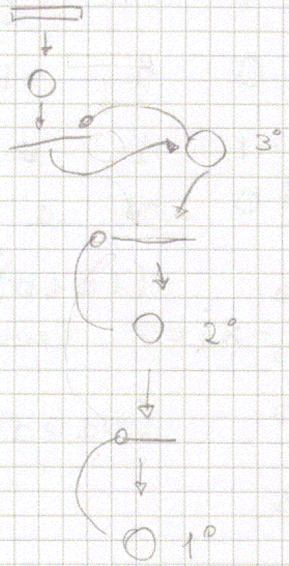
CAMBIO LE CONDIZIONE (adesso vonante AGV parte se ci sono almeno 3)



Analisi dei sistemi ad eventi

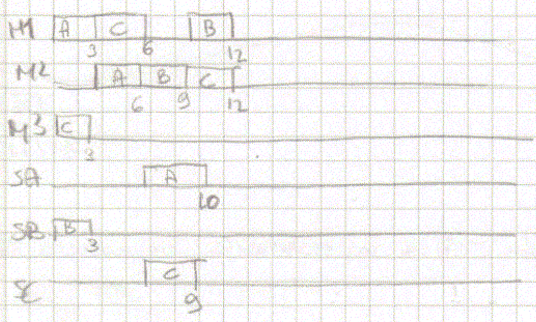
VII lezione
2/11/11

Con condizioni FIFO (per forza con archi inibitori)




ESAME 08 APRILE

VIII lezione
08/11/11

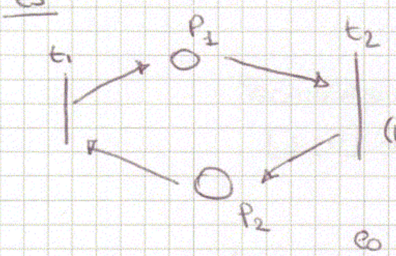



→ non sono ammessi scavalchi

All'istante $t_3$ so che c'è un conflitto effettivo $\omega + 2$

il gantt lo disegno fino a che o si blocca o la rete è ciclica

ES

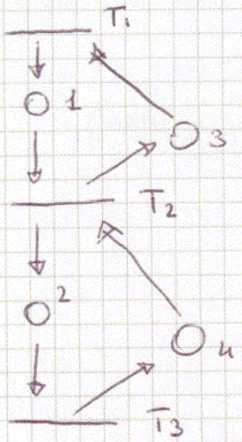



$$W^T C = 0$$

$$(w_1 \; w_2) \begin{array}{cc} T_1 & T_2 \end{array}$$
$$(w_1 \; w_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}$$

$$W_1 - W_C = 0$$
$$W_1 = W_2$$

lo pongo uguale ad 1



PROCEDIMENTO PER OTTENERE $P_{INV}$

ciclo = c'è un P-invariante

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0$ $\quad (1\,0\,1\,0)$

$-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ $\quad$ (RIDONDANTE)

$-x_2 + x_4 = 0$ $\quad (0\,1\,0\,1)$

pongo uno alla volta $= 1$

$$\alpha(1\,0\,1\,0) + \beta(0\,1\,0\,1)$$

FINE RETI DI PETRI

---

## RETI DI CODE

IX lezion
11/11/11

$\Omega$ spazio degli eventi

$X$ variabile ALEATORIA che va da $\Omega \rightarrow$ e mi restituisce un numero reale

$$X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$$

VARIABILE ALEATORIA: non assumo un solo valore $\rightarrow$ insieme di valori

VARIABILE DETERMINISTICA: assume solo un valore

alla variabile aleatoria associo ~~una~~ una PROBABILITÀ

Funzione densità di probabilità: $f(x) : x \Rightarrow [0;1]$

- variabili aleatorie continue e discrete

$$\sum_{\Omega} f(x) \Big|_{P(x)} = 1$$ nel caso discreto è proprio $P(x)$

se ho la variabile ALEATORIA $\rightarrow$ valore ATTESO

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

analisi dei sistemi ad eventi

IX lezione
11/11/11

variabile aleatoria $x$ $\xrightarrow{p(x)}$ valore atteso

$$X = \sum_{\Omega} x\, p(x)$$

→ media pesata probabilità (di ogni valore che può assumere la variabile aleatoria)

$\Omega = \{1 \dots 40\}$

$$= 1 \cdot \frac{1}{40} + 2 \cdot \frac{1}{40} + 3 \cdot \frac{1}{40}$$

(!) più si discosta dal valor medio più so che valore assumerà

CODA

SERVIZIO FORNITO DAL SERVENTE

→ [coda] → (S) → OUT

$t_a$ = tempo arrivo del cliente / variabile aleatoria continua
$t_s$ = tempo di servizio / variabile aleatoria continua
DIMENSIONE DELLA CODA : / variabile deterministica
DISCIPLINA DI SERVIZIO : come il servente prende i clienti (FIFO)
$S$ numero di serventi
VARIABILE DI STATO : variabile aleatoria / discreta
↳ $n$: numero di clienti nel sistema
$t_w$ (tempo di attesa) : nel sistema $\quad t_w = t_s + t_q$

$l$ numero di clienti che attendono in coda $\quad$ variab. aleat. discreta

$l \to n - S$ (quando $n \geq S$)
$\quad \to 0 \quad n \leq S$

(!) il valore atteso si può indicare o con la maiuscola oppure con $E_{ta}$

VALORE ATTESO $(E_{ta}) = T_a$

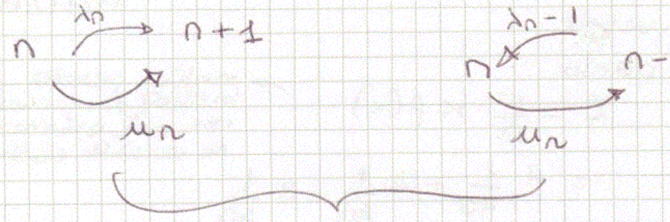
$$\frac{1}{E(t_a)} = \lambda \text{ (frequenza di arrivo)}$$

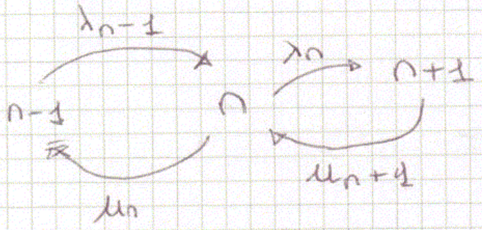
$$\frac{1}{E(t_s)} = \mu \text{ (frequenza o velocità di servizio)}$$

LEGGI DI LITTLE.

$$\boxed{W = T_q + \frac{1}{\mu}} \qquad \boxed{N = \lambda W} \qquad \boxed{L = \lambda T_q}$$

ESAMINEREMO SOLTANTO SISTEMI di NASCITA E MORTE:




(!) non si ammettono salti multipli

$P_n(t+\Delta t)$

obbiettivo → trovare distribuzione di probabilità

| $t$ | $t+\Delta t$ | $P(t+\Delta t)$ |
|---|---|---|
| $n-1$ | ENTRATA (nascita) $\lambda_{n-1}$ | $P_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1}(t)\cdot\Delta t + o[\Delta t]$ |
| $n+1$ | USCITA (morte) | $P_{n+1}(t)\,\mu_{n+1}(t)\cdot\Delta t + o[\Delta t]$ |
| $n$ | NULLA | $P_n(t) = [1-\mu_n(t)\Delta t - \lambda_n(t)\Delta t] + o[\Delta t]$ |
| non ammesso | ? | $o[\Delta t]$ |

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\,\mu_{n+1}\,\Delta t + P_n(t)\left(1-(\lambda_n\Delta t + \mu_n\Delta t)\right) + o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\,\mu_{n+1} - P_n(t)\lambda_n - P_n(t)\mu_n + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\,\mu_{n+1} - P_n(t)\lambda_n - P_n(t)\mu_n = \frac{dP_n(t)}{dt}$$

SI SF STUDIO SOLAMENTE IL CASO A REGIME (o stazionario → non dipende più dal tempo)

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

(!) studiamo sistemi di NASCITA e MORTE ma stazionario

Analisi dei sistemi ad eventi

X lezione
15/11/11

Se il sistema è stazionario

$$\lim_{t \to \infty} P_n(t) = P_n \qquad \frac{dP_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}$$

In un sistema è stazionario $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

$$P_{n-1}\lambda_{n-1} + P_{n+1}\mu_{n+1} + P_n(-\mu_n - \lambda_n) = 0$$

① Per dire qualcosa sulla variabile ALEATORIA devo prima calcolare la distribuzione di probabilità.

dimostro per induzione che forma ha $P_n$

$$n=0 \Rightarrow \cancel{P_{-1}\lambda_{-1}} + P_1 \mu_1 - \cancel{P_0\mu_0} - P_0\lambda_0 = 0$$

al max $n=0$

se ho 0 clienti non posso processare

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$n=1 \Rightarrow \cancel{P_0\lambda_0} + P_2\mu_2 - \cancel{P_1\mu_1} - P_1\lambda_1 = 0$$

$$P_2 = \frac{P_1\lambda_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}$$

$$n=2 \Rightarrow P_1\lambda_1 + P_3\mu_3 - P_2\mu_2 - P_2\lambda_2 = 0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} \cdot P_0$$

$$\boxed{P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdots \mu_1} \cdot P_0} \qquad n \geq 1$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1}$$

CONDIZIONE da soddisfare per trovare le soluzioni del sistema

$\Pi \to$ PRODUTTORIA

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{a=1}^{n} \mu_a} P_0 \qquad P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{a=1}^{n} \mu_a} P_0$$

RISOLVO SISTEMA

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{a=1}^{n} \mu_a}}$$

$\lambda \to$ dipende dallo stato

DIMOSTRAZIONI PER TROVARE $P_n$

SISTEMI M/M/1 → DOMANDA PER ORALE

→ se non c'è scritto un altro parametro significa che la coda è infinito

→ numero di serventi

→ Come sono caratterizzati gli arrivi (tempo arrivo distribuzione esponenziale)

M / M → ~~come sono caratterizzati~~ tempo di servizio

$\lambda$    $\mu \to t_{\text{empo servizio}} \to$ esponenziale

$t_{\text{arrivo}} \to$ Ex: 5 pezzi e ora → esponenziale → variabile aleatoria continua

$t_{\text{interarrivo}} \to$ tempo di arrivo tra un e il successivo → Poisson $\lambda$ (il tempo è discreto)

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda & n = 0, 1, \dots \\ \mu_n = \mu & n = 1, 2, \dots \\ \rho < 1 \longrightarrow \lambda < \mu \end{cases}$$

→ condizione di stazionarietà

Serie Geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff x < 1$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho$ fattore di utilizzazione (quanto è utilizzato il servente)

$$\frac{1}{P_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho)^n = \frac{1}{1-\rho}$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

(!) $\lambda$ e $\mu$ sono valori attesi → anche se $\lambda < \mu$ possiedo comunque la coda

Analisi dei sistemi ad eventi

X lezione
15/11/11

In un sistema ie "collo di bottiglia ha valore prossimo a 1

valore atteso $N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (\rho)^n P_0 =$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} \cdot \rho = \rho P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n = \rho P_0 \frac{d}{d\rho} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

$$= \rho P_0 \left( + \frac{1}{(1-\rho)^2} \right) = \rho (\cancel{1-\rho}) \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)}$$

$$\boxed{N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$$

$$W = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda \left( \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} \right)$$

nei sistemi M/M/1

XI lezione
18/11/11

SISTEMI M/M/S → coda infinita

M M S
$\lambda$ $\mu$ → serventi in parallelo

la velocità del servizio in questo caso dipende dallo stato

$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0, 1 \ldots$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{se } n \leq S & n\mu \\ \text{se } n \geq S & S\mu \end{array}\right\} = \mu_n$$

→ velocità di servizio del sistema
→ IPOTESI DI FUNZIONAMENTO

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{J=1}^{n} \mu_J} P_0 \qquad P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{J=1}^{n} \mu_J}}$$

Esamino a parte solo $\mu$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{J=1}^{n} \mu_J = \underbrace{\sum_{n=1}^{S-1} \prod_{J=1}^{n} \mu_J}_{a} + \underbrace{\sum_{n=J}^{\infty} \prod_{J=1}^{n} \mu_J}_{b}$$

$n < S$ → $\prod_{J=1}^{n} \mu_J = \mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot (S-1)\mu$

→ $\sum_{n=1}^{S-1} n!\, \mu^n$

$n \geq S$ → se $n = S$ $\quad \prod_{J=1}^{n} \mu_J = S!\, \mu^S$

se $n = S+1$ $\quad \prod_{J=1}^{n} \mu_J = S!\, \mu^S \cdot S\mu$

se $n = S+2$ $\quad \prod_{J=1}^{n} \mu_J = S!\, \mu^S (S\mu)^2$

$$\sum_{n=S}^{\infty} S!\, \mu^S (S\mu)^{n-S}$$

$$\text{Denominatore}\Big|_{P_0} = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod \lambda}{\prod \mu} = 1 + \cancel{\sum_{n=0}^{S-1} n! S\mu}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{S-1} \frac{\lambda^2}{n!\, \mu^n} + \sum_{n=S}^{\infty} \frac{\lambda^2}{S!\, \mu^S (S\mu)^{n-S}} = 1 + \sum_{n=1}^{S-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^{\infty} \frac{\lambda^n}{S!\, \mu^S (S\mu)^{n-S}}$$

$$= \sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

Analisi dei sistemi ad eventi

XI lezione
18/11/11

$$\sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s!\,\mu^s (s\mu)^{n-s}} = \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}$$

$$\rho\Big|_{M/M/s} = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

→ la serie così converge
CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}}$$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j} P_0$$

$n < s$

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

$n \geq s$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{s!\,\mu^s (s\mu)^{n-s}} = \frac{\lambda^{n-s}\lambda^s}{s!\,\mu^s (s\mu)^{n-s}}$$

$$\cancel{P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}}}$$

$$P_n = \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad n \geq s$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n \leq s \\ \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n \geq s \end{cases}$$

→ mi trovo il valore atteso di L così queste due formule diventano una sola

$$L = \sum_{l=0}^{\infty} P_l \cdot l = \sum_{n-s=0}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

$l = n - s$ ← costante

$$= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \frac{1}{s!\, s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{s!\, s^k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+s} \cdot P_0 = \frac{P_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k$$

$k \triangleq n - s$

$$= \frac{P_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} \cdot \rho$$

22/11/11

## SISTEMI M/M/1/K

$\triangle$ dimensione del sistema
dimensione della coda $K-1$

M M
$\gamma$

$$\begin{cases} \mu_n = \mu & n = 1, 0 \\ \lambda_n = \gamma & 0 \leq n \leq K-1 \\ 0 \rightarrow n = K \end{cases}$$

$\lambda$ è proporzionale a $\gamma$
$\lambda = \varepsilon \gamma$ sono valori attesi

FATTORE DI PERDITA $= 1 - \varepsilon$

$$\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i = \gamma^n$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{K} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j}}$$

$b = p - (K+1)$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n}$$

$$\sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m - \sum_{p=K+1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^p = \frac{1}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}}$$

analisi dei sistemi ad eventi

XII lezione
22/11/11

$$P_0 = \frac{1-\frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \qquad P_n = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & 0 \le n \le K \\ 0 & n > K \end{cases}$$

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{K} n \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n P_0 = P_0 \left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{d}{d(\gamma/\mu)} \sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n =$$

$$= P_0 \frac{\gamma}{\mu} \frac{d}{d(\gamma/\mu)} \left[ \frac{1}{1-\frac{\gamma}{\mu}} - \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\frac{\gamma}{\mu}} \right]$$

$$N = P_0 \frac{\gamma}{\mu} \left( \frac{1}{(1-\gamma/\mu)^2} - \frac{(K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K (1-\gamma/\mu) + \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{(1-\gamma/\mu)^2} \right)$$

$$N = P_0 \frac{\gamma}{\mu} \left( \frac{1-(K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K + (K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1} + \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{(1-\gamma/\mu)^2} \right)$$

$$N = P_0 \frac{\gamma}{\mu} \left[ \frac{-(K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K \cancel{\left(1-\frac{\gamma}{\mu}\right)}}{(1-\gamma/\mu)^{\cancel{2}}} + \frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{(1-\gamma/\mu)^2} \right]$$

$$N = \left( \frac{1-\gamma/\mu}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \right) \frac{\gamma}{\mu} \left[ \frac{-(K+1)\cdot\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{(1-\gamma/\mu)} + \frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{(1-\gamma/\mu)^2} \right]$$

$$N = \frac{-(K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}\right)} + \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)}{\left(1-\frac{\gamma}{\mu}\right)}$$

(!) la condizione di stazionarietà non è necessaria perché ho K

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - P_0 \Rightarrow \lambda = \mu(1-P_0)$$

$$\lambda = \underset{<1}{\varepsilon}\,\gamma = \mu(1-P_0) = \mu\left[1 - \frac{1-\frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{k+1}}\right] =$$

$$\lambda = \mu\,\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{k+1} - 1 + \frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{k+1}} = \cancel{\mu}\,\frac{\gamma}{\cancel{\mu}}\underbrace{\left[\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{k}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{k+1}}\right]}_{\varepsilon}$$

$$P_k = 1 - \varepsilon$$

<u>NOTAZIONE DI KENDAL</u> → M/M ...

condizioni di stazionarietà → se no la coda esplode

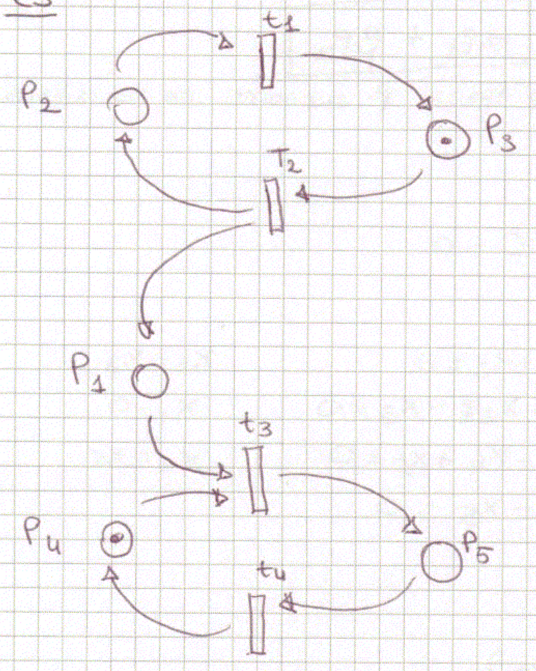
<u>LIFO</u>

Analisi dei sistemi ad eventi

~~XIII~~ lezione

ESERCITAZIONE ANTE-ESONERO:

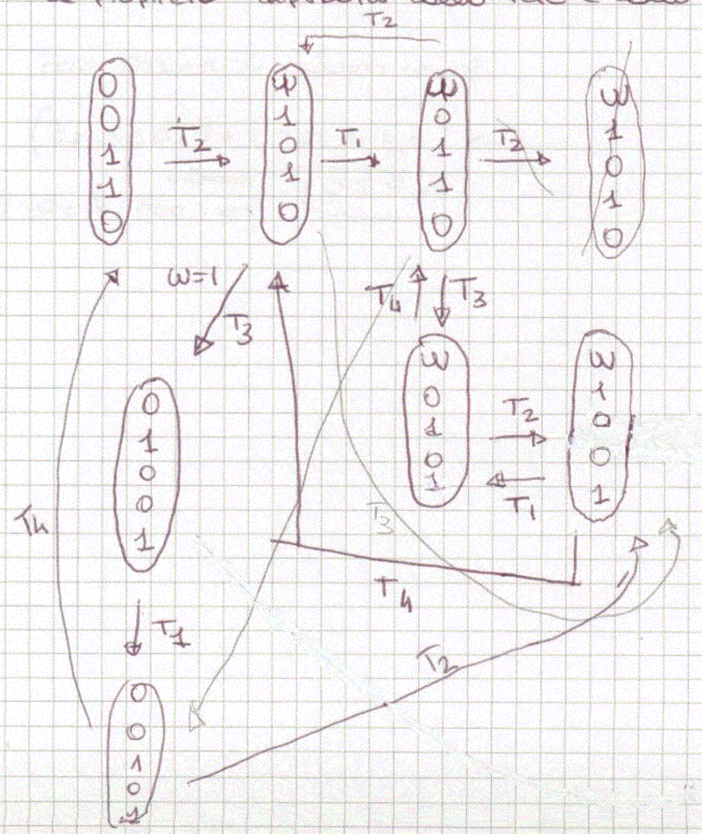
ES




- è illimitata e reversibile
- non è strettamente conservativa
- non è conservativa in senso assoluto poiché $H \geq 0$!
- è conservativa rispetto ad un vettore
- è viva

GRAFO DI STATO:

- le proprietà dipendono dalla rete e dallo stato iniziale




$\omega \geq 1$

devo considerare tutti i casi in cui omega è = 1

considerare

P- INVARIANTE

$(0,1,1;00) = P_1$

$(0,0\,0\,1,1) = P_2$

$(0\,1\,1\,1\,1)$

$\boxed{\alpha P_1 + \beta P_2}$

(!) se ho un P- invariante ne ho infiniti

$$C = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} t_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x^T C = 0$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = x_3$
$x_1 = 0$
$x_4 = x_5$

P- INVARIANTI A SUPPORTO MINIMO
(faccio una condizione alla volta)
e al resto metto 0

P-Invariante CANONICO
e A SUPPORTO MINIMO

$(0\,1\,1\,0\,0)$

$(0\,0\,0\,1\,1)$

se mi chiede di scriverli tutti

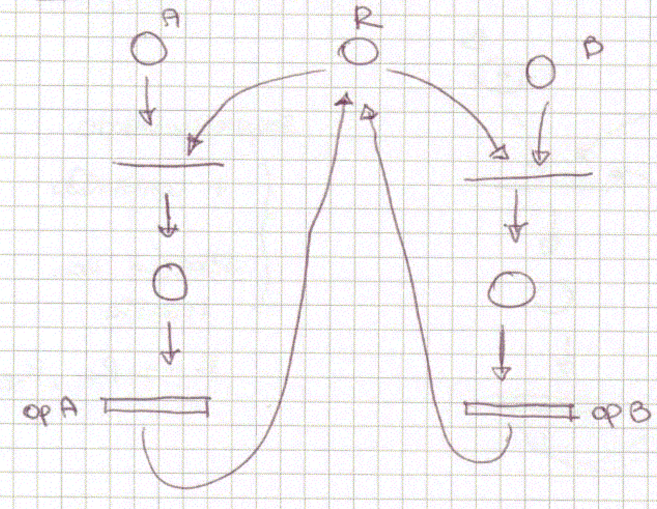
$\alpha(0,1,1,0,0) + \beta(0\,0\,0\,1\,1)$

$\boxed{\alpha, \beta \geq 0}$ ~~$\alpha = \beta$~~ ma non $\alpha = \beta = 0$ !

Analisi dei sistemi ad eventi

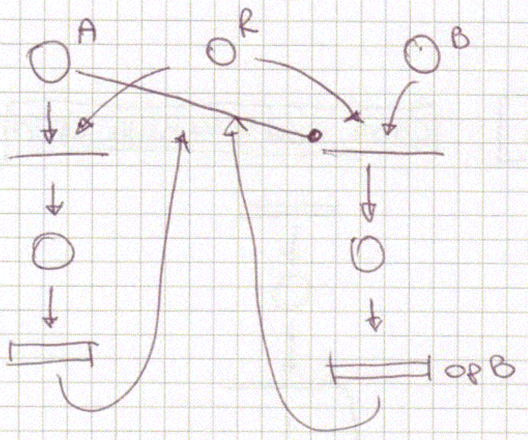
XIII lezione

## CONFLITTI STRUTTURALI



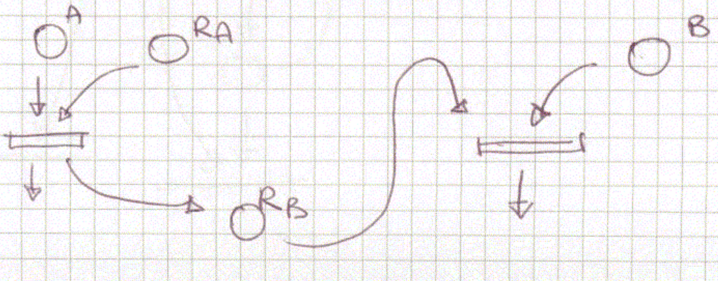

## RISOLVO IL CONFLITTO

precedenza di A → B

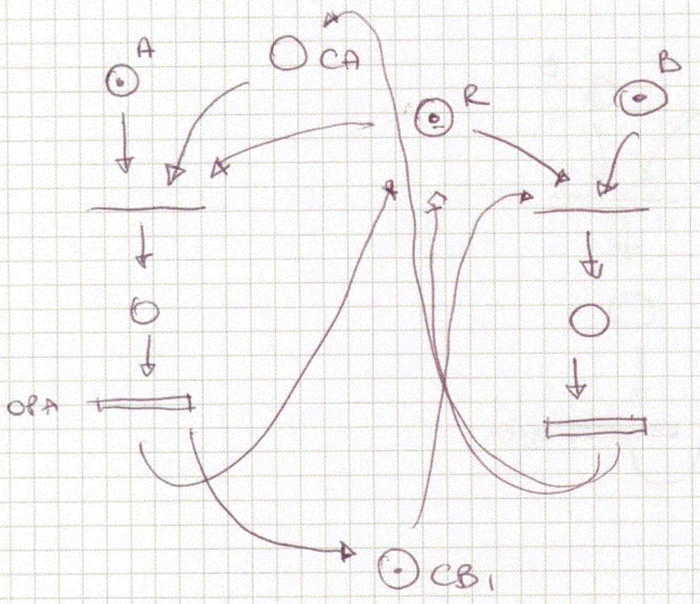



ARCO INIBITORE

## SDOPPIAMENTO DELLA RISORSA



## CONTROLLO SUPERVISORE

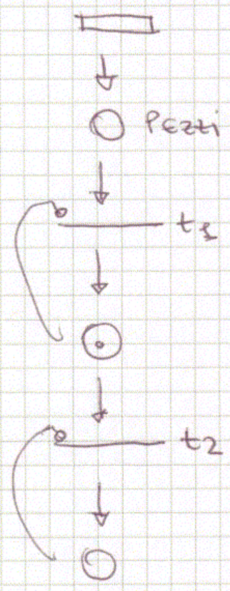



Sequenziamento
- + controllo
- sdoppio la risorsa

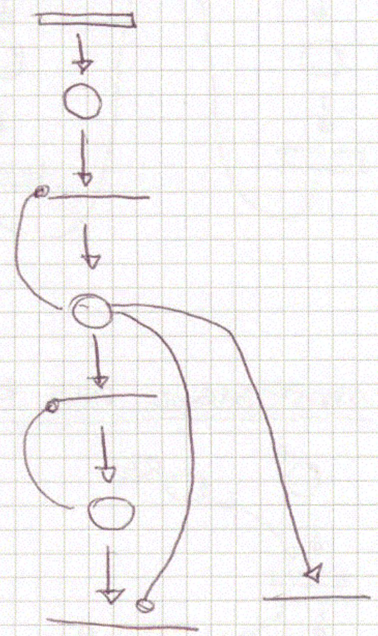
$R \rightarrow R_A, R_B$

Una volta che ho risolto il conflitto posso evitare di modellare istantaneo e temporizzato

## CODA CON DISCIPLINA FIFO



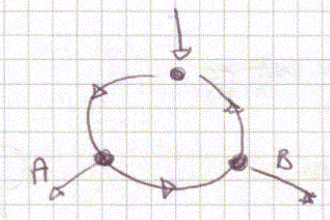

## CODA CON DISCIPLINA LIFO



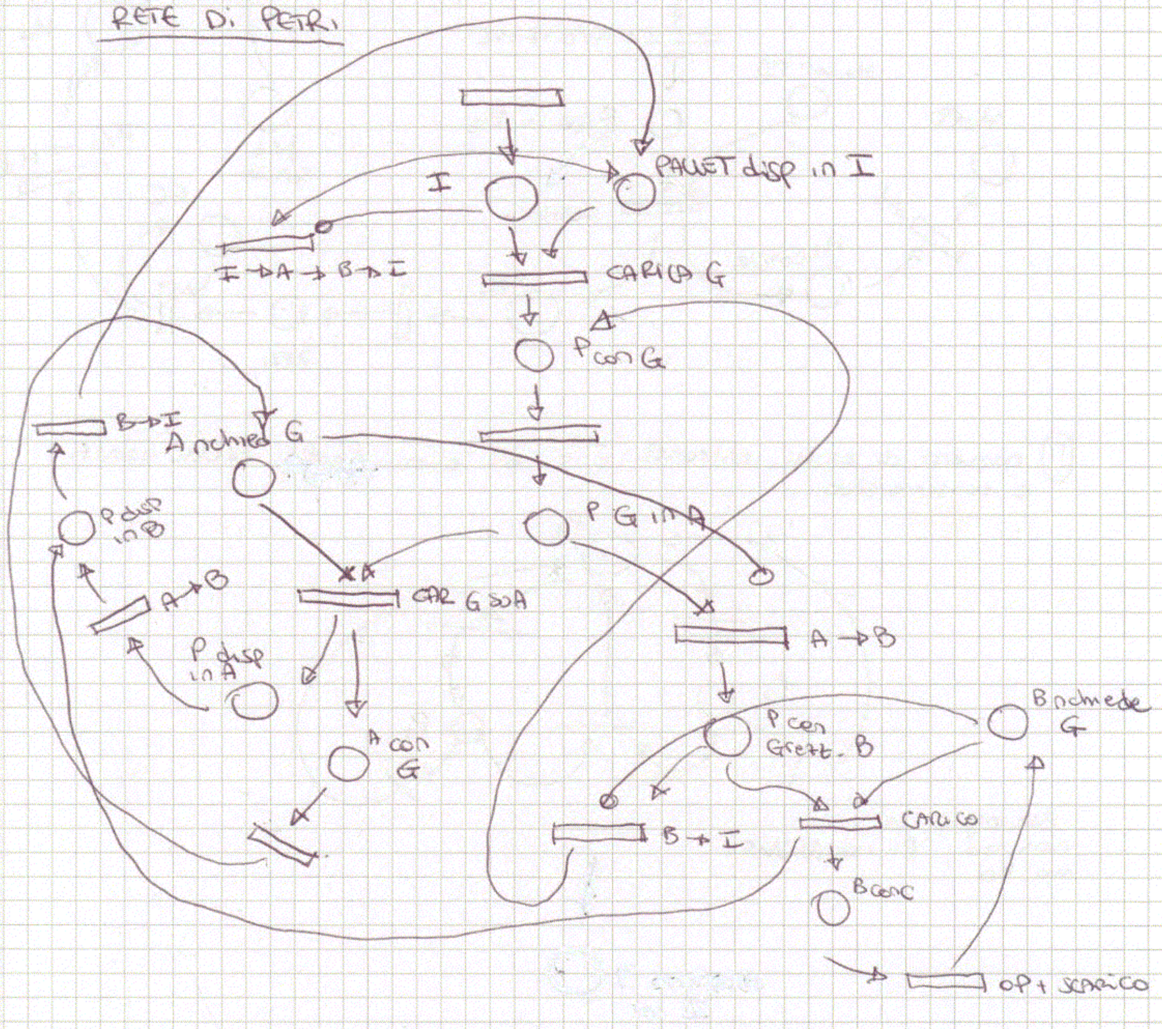
Analisi dei sistemi ad eventi

XIV esercitazione 29/11/11

3.7




RETE DI PETRI

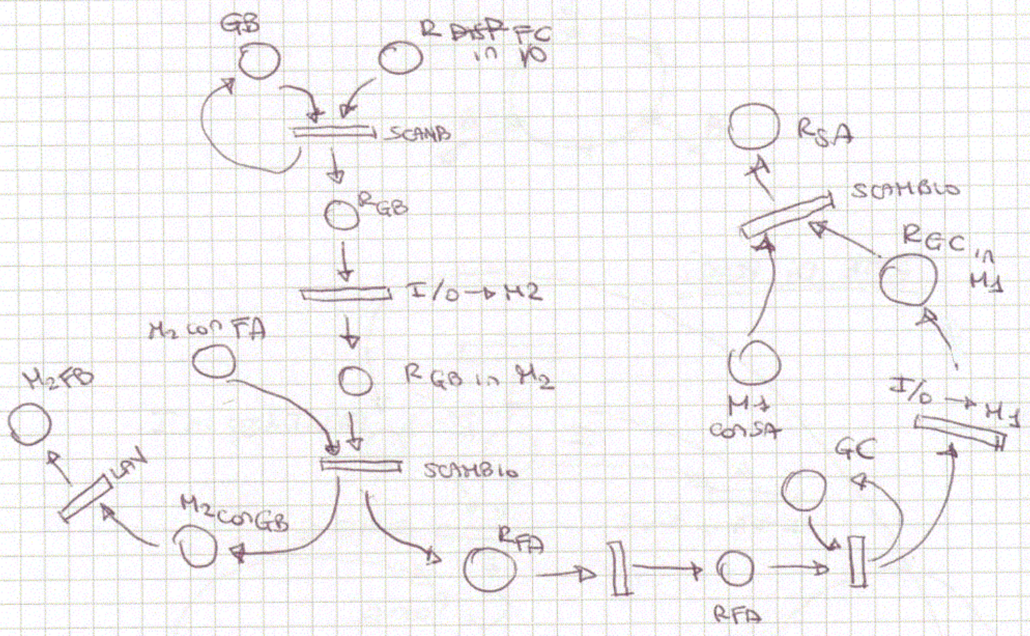


Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

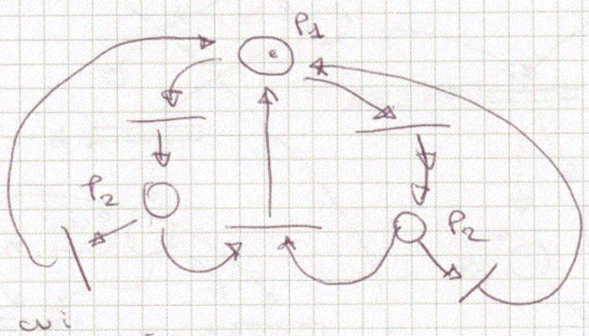
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

ESERCIZIO D'ESAME 8 FEB 2011

UTILIZZO IL SEQUENZIAMENTO STRETTO




(!) numero di archi entranti è = al num. degli archi uscenti
è conservativo




esempio in cui
non ho P-INVARIANTI
ma ho

Analisi dei sistemi ad eventi

XV lezione
6/12/11

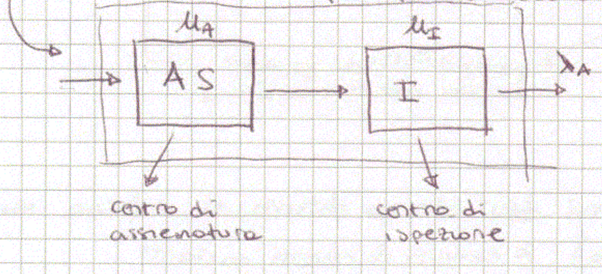
arrivi in un sistema sono distribuiti esponenzialmente

$$\xrightarrow{\lambda} \boxed{\lambda < s\mu} \xrightarrow{\lambda}$$

{ distribuzione arrivi = distribuzione uscite coda illimitata
{ " " " = " " " limitata

⇒ SISTEMA TANDEM // RETI DI CODE APERTE

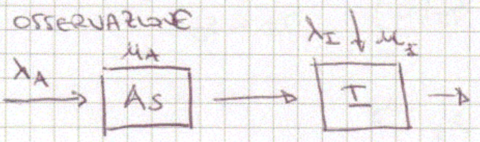
Reti di code aperte: perché ho uno scambio con l'esterno con uno o più freccie dall'esterno




$$N = N_A + N_I = \frac{\lambda_A}{\mu_A - \lambda_A} + \frac{\lambda_I}{\mu_I - \lambda_I}$$

valore atteso dell'intero sistema
MM1
MM1

⇒ OSSERVAZIONE




gli arrivi alla stazione I sono sempre distribuiti esponenzialmente ma il parametro caratteristico è la somma di $\lambda_I$ e $\lambda_A$

Domanda soglia (reti di code aperte)

## TEOREMA JACKSON

Rete di code aperte, $1/\lambda_J$ valore atteso del tempo di arrivo, $1/\mu_J$ valore atteso del tempo di servizio, M macchine

IPOTESI:

a) arrivi distribuiti esponenzialmente con $\lambda_J$
b) tempo di servizio distribuito esponenzialmente con $\mu_J$
c) $P_{iJ}$, la probabilità di instradamento da $i$ a $J$

PROBABILITÀ DI INSTRADAM. ← $\sum_{J=0}^{M} P_{iJ} = 1$ dove 0 è l'esterno, 1 -- M macchine

mi dice il peso degli archi

d) code illimitate
e) FIFO

probabilità di passare dalla macchina $i$ a $J$

HP per tutte le reti aperte

(!) le reti chiuse non hanno arrivi dall'esterno distribuiti in forma esponenziale (ad arrivo corrisponde un'uscita) K numero di clienti costanti
NELLE RETI CHIUSE non posso applicare M/M/1 & M/M/S → perché non sono distribuite esp.

f) $$f_J(n_J) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_J!}\left(\dfrac{\lambda'_J}{\mu_J}\right)^{n_J} f_J(0) & n_J \le S_J \\[2ex] \dfrac{1}{S_J!\,S_J^{\,n_J-S_J}}\left(\dfrac{\lambda'_J}{\mu_J}\right)^{n_J} f_J(0) & n_J \ge S_J \end{cases}$$

probabilità che nella staz. $n_J$ ci siano $n_J$ clienti

simile alla distr. M/M/S

affinché questa sia una distribuzione di probabilità si deve avere che:

g) $\sum_{n_J=0}^{\infty} f_J(n_J) = 1 \qquad \lambda'_J < S_J \mu_J$

$\lambda'$ effettivo → reali arrivi alla stazione (tengo conto delle interconnessioni tra stazioni)

def $\lambda'_J = \lambda_J + \sum_{i=1}^{M} P_{iJ} \cdot \lambda'_i$

connessione con l'esterno

Analisi dei sistemi ad eventi

XV lezione
6 / 12 / 11

TESI

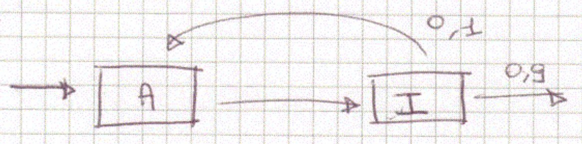
$$\Longrightarrow P(n_1 \dots n_M) = \prod_{J=1}^{M} f_J(n_J)$$

→ ci dice che le variabili sono indipendenti quindi posso considerare ogni singolo sistema separato dagli altri

possiamo trattare le stazioni come se fossero indipendenti perché ho sostituito le $\lambda$ con le $\lambda'$ effettive

(!) così calcolando $\lambda'$ posso utilizzare tutte formule ricavate in precedenza M/M/1 etc. etc.

EX



M/M/1

N = ?

$\lambda_A = 10$ p/h
$\mu_A = 12$ p/h
$\mu_I = 15$ p/h

$$\begin{cases} \lambda'_A = \lambda_A + 0{,}1\,\lambda'_I \\ \lambda'_I = \lambda'_A \end{cases}$$

$0{,}9\,\lambda'_A = 10 \qquad \lambda'_A = \dfrac{10}{0{,}9} = 11{,}11$ p/h

$\lambda'_I < 15$ p/h OK

$\lambda'_A < 12$ p/h OK

$$N_A = \frac{\lambda'_A}{\mu_A - \lambda'_A} = \frac{11{,}11}{12 - 11{,}11} = 12{,}5 \text{ p}$$

$$N_I = \frac{\lambda'_I}{\mu_I - \lambda'_I} = 2{,}85 \text{ p}$$

$N_A + N_I = N = 15{,}35$

applico Little

$$W = \frac{N}{\lambda} = \frac{15,35}{10} = 1,535\,h$$

$$W \overset{?}{=} W_i$$

$$\boxed{W = \sum_{i=1}^{M} v_i W_i}$$

visit count

$$\boxed{v_i = \frac{\lambda'_i}{\lambda}} = 1,1 = v_A$$

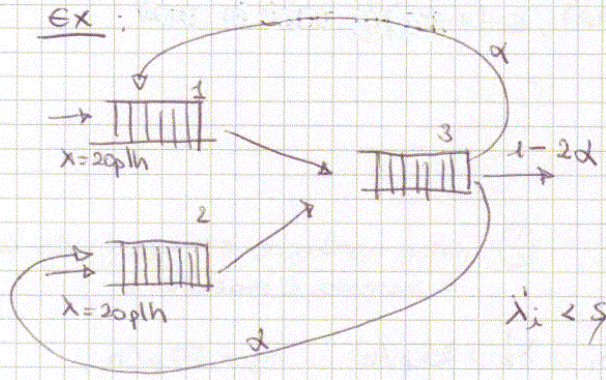
(1) tutto quello che è moltiplicato per ~~il visit count~~ il tempo lo devo moltiplicare per il visit count

$$W = 1,1 \cdot \frac{1}{\mu_A - \lambda'_A} + 1,1 \frac{1}{\mu_I - \lambda'_I}$$

XVI lezione 13/12/11

Analisi dei sistemi ad eventi

Ex:




$\mu_1 = 30 p/h$
$\mu_2 = 40 p/h$
$\mu_3 = 60 p/h$

Calcolare $\alpha$ max tale che il sistema risulti stazionario?

$\lambda'_i < \cancel{S_i}\mu_i$

reti aperte → sistema M/M/1

$$\lambda'_1 = 20 + \alpha\lambda'_3 = \lambda'_2$$
$$\lambda'_3 = 2\lambda_1 = \lambda'_1 + \lambda'_2 = 40 + 2\alpha\lambda'_3 \rightarrow \lambda'_3 = \frac{40}{1-2\alpha}$$

$$\frac{20}{1-2\alpha} < 30 \qquad \frac{40}{1-2\alpha} < 60$$

$$(1-2\alpha)\cdot\frac{20}{1-2\alpha} < 30(1-2\alpha)$$

$\cancel{20 = 40\alpha <}$ $\quad 60\alpha < 10 \quad \alpha \le 1/6 - \varepsilon$

non può essere $= \frac{1}{6}$ perché $\lambda$ non può essere strettamente uguale a $\mu$

Ex:

Quanti pezzi produce la stazione? → produttività

$\xrightarrow{\lambda} \boxed{\mu} \rightarrow$ Vale anche per i sistemi M/M/S

produttività reale $x_R = \lambda$ ~~produttività reale~~ (THROUGHPUT) $\quad \mu > \lambda$

produttività teorica $x_T = S\mu$

$$x_R < x_T$$

$$\boxed{x_R = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i} \qquad x_T = \frac{S_i\mu_i}{r_i} \qquad \boxed{x_T = \min_i\left\{\frac{S_i\mu_i}{r_i}\right\}}$$

$r_i$ → visit count

$$r_i = \frac{\lambda'_i}{\lambda}$$

! condizioni di stazionarietà e visit count sono domande soglia

$$x_R = 40 p/h \qquad x_T = \min_i\left\{\frac{30}{\frac{\frac{20}{1-2\alpha}}{40}} \rightarrow \left(\frac{30}{\frac{1}{2(1-2\alpha)}}\ ;\ \frac{40}{\frac{1}{2(1-2\alpha)}}\ ;\ \frac{60}{\frac{1}{1-2\alpha}}\right)\right\}$$

il collo di ~~bott~~ bottiglia sono 1, 3 (macchine che limitano la produzione)

$\min \{ 30 \cdot 2(1-2\alpha), 80(1-2\alpha), 60(1-2\alpha) \}$

$40 < 60(1-2\alpha)$

$40 < 60 - 120\alpha$

$120\alpha < 20 \qquad \alpha < 1/6$

supponendo $\alpha = 0,1$

(!) posso applicare JACKSON solo se il sistema è stazionario

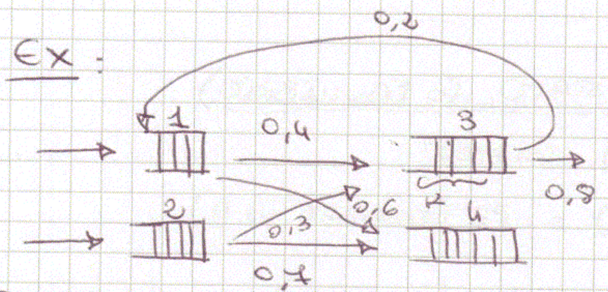
$W = ? = \sum_{i=1}^{M} v_i W_i \qquad \lambda_1' = \lambda_2' = 25 \, p/h \qquad \lambda_3' = 50 \, p/h$

$$W = \frac{25}{40}\left(\frac{1}{30-25}\right) + \frac{25}{40}\left(\frac{1}{40-25}\right) + \frac{50}{40}\left(\frac{1}{60-56}\right) = 0,292h$$

XVII lezione
10/01/2012

Analisi dei sistemi ad eventi

Ex :




$\lambda_1 = 20$ p/h
$\lambda_2 = 30$ p/h
$\mu_1 = 35$ p/h
$\mu_2 = 35$ p/h
$\mu_3 = \mu_4 = 40$ p/h

RETE APERTA

① CALCOLARE $\lambda'$ (effettivi)
↳ controllare che il sistema è stazionario

$$\begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 + 0,2\,\lambda'_3 & \text{(devo guardare } \lambda'_3) \\ \lambda'_2 = \lambda_2 \\ \lambda'_3 = 0,4\,\lambda'_1 + 0,3\,\lambda'_2 = 0,4\,\lambda'_1 + 9 = 18,68 \text{ p/h} \\ \lambda'_4 = 0,6\,\lambda'_1 + 0,7\,\lambda'_2 = 0,6\,\lambda'_1 + 21 = 35,21 \text{ p/h} \end{cases}$$

$$\lambda'_1 = \lambda_1 + 0,2\,\lambda'_3 = 20 + 0,08\,\lambda'_1 + 0,18 \rightarrow \lambda_1 = \frac{21,8}{0,92} = 23,69 \text{ p/h}$$

② verifico se è stazionario

$\lambda'_1 < \mu_1$
$\lambda'_3 < \mu_3$
$\lambda'_4 < \mu_4$

il tempo va sempre moltiplicato per il visit count

$$N = \sum_{i=1}^{4} N_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda'_i}$$

– TEMPO DI ATTRAVERSAMENTO –

$$W = v_1 \frac{1}{\mu_1 - \lambda'_1}$$

→ limito il 3 sistema a K (lo dice il testo)

$$P(n > K+1) < 0,01$$
$$\|$$
$$n \geq K+2 \qquad \rho = \frac{\lambda'}{\mu}$$

~~nel sist~~ la formula $M/M/1/0$ → qui c'è quella del sistema

rappresenta la capacità del sistema

$$\sum_{n=K+2}^{\infty} P_n \Big|_{M/M/1} = \sum_{n=K+2}^{\infty} \rho^n (1-\rho)$$

$m = n - (K+2)$

$$(1-\rho)\rho^{k+2}\frac{1}{1-\rho} < 0,01$$

EQUAZIONI DI ~~STASI~~ STATO (O EQUILIBRIO)

$n = (n_1 \dots n_4)$ (STATO)

PB (uscito da n) = PB (ENTRANTE in n)

n = (→ ho 4 stazioni) (0, 1, 3, 2)

stazione 1, slot 2, slot 3, slot 3

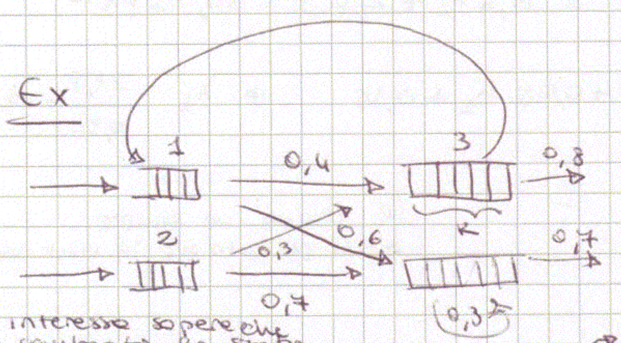
$$P(0,1,3,2) = P_1(0)\cdot P_2(1)\cdot P_3(3)\cdot P_4(4) = \cancel{(1-\rho_1)\,\rho_2\,(1-\rho_2)}$$

$$= (1-\rho_1)\rho_2(1-\rho_2)\rho_3^3(1-\rho_3)\rho_4^2(1-\rho_4)$$

PB USCITA $(0,1,3,2) = (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+\mu_3+\mu_4)\cdot P(0,1,3,2)$

morte (→ cambio stato

Ex




le stazioni che posso no processare solo se stazioni che hanno i clienti

mi interessa sapere che ho cambiato lo stato

mi ci devo trovare nello stato

PB USCITA $(0,1,3,2) = (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2+\mu_3+0,7\mu_4)\cdot P(0,1,3,2)$

minimo tra clienti → serventi

$$\boxed{r_j = [\min(n_s, s_j)\cdot\mu_s]}$$

ENTRATA in n (0, 1, 3, 2)

(1, 1, 3, 2) stato adiacente non possibile poiché dal sistema non c'era

7 combinazioni (senza loop) 8 (con loop)

$$0,4\mu_1 P(1,1,2,2) + 0,6\mu_1 P(1,1,3,1) + 0,8\mu_3 P(0,1,4,2) + \lambda_2 P(0,0,3,2)$$

$$r_j'' \quad + 0,3\mu_2 P(0,2,2,2) + 0,7\mu_2 P(0,2,3,1) + \mu_4 P(0,1,3,3)$$

senza loop

con loop → $+0,7\mu_4 P(0,1,3,3) + 0,3\mu_4 P(0,1,3,4)$

XVII lezione
10/01/12

Analisi dei sistemi ad eventi

"FORMALIZZAZIONE" EQ. DI EQUILIBRIO

Stato $n = (n_1 \ldots n_m)$

$n_{JK} \triangleq (n_1 \ldots (n_J+1) \ldots (n_{K-1}) \ldots n_M)$

$n_{0,K} = (n_1 \ldots (n_{K}-1) \ldots n_M)$

$n_{J,0} = (n_1 \ldots (n_J+1))$

USCITE

$$\boxed{\left(\sum_{J=1}^{M} \lambda_J + (1-P_{JJ}) \sum_{J=1}^{M} x_J\right) P(n)}$$

$$\boxed{x_J = [\min(s_J, n_J) \cdot \mu_J]}$$

ENTRATE

$$\boxed{\sum_{J=1}^{M} P_{J,0}\, x_J\, P(n_{J0}) + \sum_{J=1}^{M} \lambda_J (P(n_{0K}) + \sum_{J=1}^{M}\sum_{K=1}^{M} P_{JK}\, x_J\, P(n_{JK})}$$

XVIII lezione
17/01/12

Eq. di equilibrio → dato uno stato $n = (n_1 \ldots n_M)$

uscita dallo stato $n$ $P(n)$ $x_J$ minimo clienti

l'uscita è più facile perché mi interessa solamente la perturbazione non lo stato in cui arrivo.

$$\left(\sum_{J=1}^{M} \lambda_J + \sum_{J=1}^{M} (1-P_{JJ}) r_J\right) P(n)$$

$n_{JK} \triangleq (n_1 \ldots (n_J+1) \ldots (n_K-1) \ldots n_M)$

$J$: stati in cui ho un cliente in più
$K$: stati in cui ho un cliente in meno

ENTRATA $n$

$\sum_{J=1}^{M} P(n_{J0})\, r_J\, P(n_{J0})$ (con $J$ → un cliente in più)

$\sum_{K=1}^{M} \lambda_K P(n_{0K})$ (con $K$ → nuscito)

$(n_K \geq 1)$ → condizione affinché ne posso uscire domanda esonero

ENTRATA n

$$\sum_{J=1}^{M} p_{J0} r_J P(n_{J0}) + \sum_{\substack{K=1 \\ (n_K \geq 1)}}^{M} \lambda_K P(n_{0K}) + \sum_{J=1}^{M} \sum_{\substack{K=1 \\ (n_K \geq 1)}}^{M} p_{JK} r_J P(n_{JK})$$

$n_{JJ} = n_{KK} = n$

il loop va tolto per le uscite e va usato per le entrate

Ex

$n = (1, 1, 3)$

$p_{21} \mu_2 P(0, 2, 3) \quad s_2 = 1$

$r = \min(s, n) \cdot \mu$

$p_{21} \, \underbrace{2\mu_2}_{r_2} P(0, 2, 3) \quad s_2 \geq 2$

RETI CHIUSE

non ho arrivi distribuiti esponenzialmente

N non è più un valore atteso ma una costante.

Uscita n

$$\left(\cancel{\sum_{i=1}^{M} \lambda_i} + \sum_{J=1}^{M} (1 - p_{JJ}) r_J\right) P(n)$$

non ho più $\lambda$ poiché non ho più arrivi

(1) quando esce un cliente ne entra subito un altro

Entrata n

$$\cancel{\sum_{J=1}^{M} p_{J0} r_J P(n_{J0})} + \cancel{\sum_{\substack{K=1 \\ (n_K \geq 1)}}^{M} \lambda_K P(n_{0K})} + \sum_{J=1}^{M} \sum_{K=1}^{M} p_{JK} r_J P(n_{JK})$$

poiché il numero di clienti è costante

non ho $\lambda$

tutti i serventi impiegano lo stesso tempo

$$\boxed{X_J = \frac{v_J}{\mu_J}}$$

valore atteso di quanto tempo un cliente ~~perde~~ spende nella stazione J (è un tempo)

$$\boxed{v_J = \sum_{i=1}^{M} p_{iJ} v_i}$$

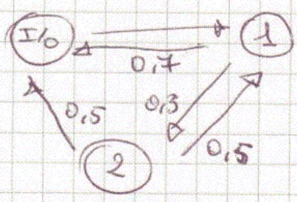
Analisi dei sistemi ad Eventi

XXIII lezione
17/01/12

## ESEMPIO

$$v_{I/O} = 0{,}7\, v_1 + 0{,}5\, v_2$$

si prende come riferimento il $v_{I/O} = 1$
a meno che non si dica che un altra stazione sia visitata 3 volte




## TEOREMA DI GORDON

→ non ci dice che le stazioni sono indipendenti → come anche JACKSON

$$f_J(n_J) \begin{cases} \dfrac{x_J^{n_J}}{n_J!} & n_J \le S_J \\[2ex] \dfrac{x_J^{n_J}}{S_J!\, S_J^{\,n_J - S_J}} \end{cases}$$

NO DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

### TESI

$$P(n) = \frac{\prod_{J=1}^{M} f_J(n_J)}{G(N)}$$

→ FATTORE DI NORMALIZZAZIONE
$G(N)$ def d'omega
∀ tutti gli stati ammissibili per tutte le distribuz di N

$$G(N) = \sum_{\Omega} \prod_{J=1}^{M} f_J(n_J)$$

cardinalità tutti i modi possibili di distribuire gli N clienti su M ~~macchine~~ macchine

**EX**

$$\{5, 7, 3, 2, 8\}$$

$$\bar{N} = \left\{\frac{5}{25}, \frac{7}{25}, \frac{3}{25}, \dots\right\}$$

$$G(N) = \sum_{|\Omega|} \prod_{J=1}^{M} f_J(n_J)$$

→ ÷ tutti i modi possibili di distribuire N clienti su M macchine

FORMULA RICORSIVA → $G(N) = G(M, N) = f_M(K) \cdot G(M-1, N-K)$

rappresenta le prime M macchine → le ho ordinate
→ mi riesco a calcolare tutti gli elementi

**EX**

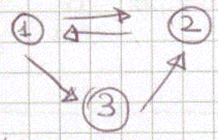
$n_J$

| Ex | 1 | 2 | ... | M |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | ... | 1 |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| ⋮ | | | | |
| N | | | | |

~~XIX~~ lezione
20/01/2012

$$P(n) = \frac{\prod_{j=1}^{M} f_j(n_j)}{G(N)}$$

$$\boxed{G(M,K) = \sum_{k=0}^{N} f_M(k)\, G(N-1, N-K)}$$



N = 6

(!) numerare è mettere per ultimo trucchetto!!

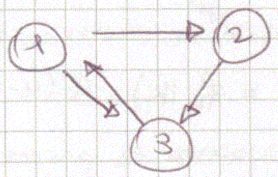
l'ultima stazione la devo mettere per ultima se no vale la formula ricorsiva

→ perché se no conto le stazioni meno volte!

$$P(3,1,2) = \frac{f_1(3)\, f_2(1)\, f_3(2)}{G(N)}$$

$$P(n_M = K) = \frac{f_M(K)\, G(M-1, N-K)}{G(M,N)}$$

Ex



$P(n_2 = 2) = ?$

$v_1 = 1 \quad \mu_1 = 10\,p/h$

$v_2 = 0{,}5 \quad \mu_2 = 3\,p/h$

$v_3 = 1{,}2 \quad \mu_3 = 5\,p/h$

CAMBIO ORDINE

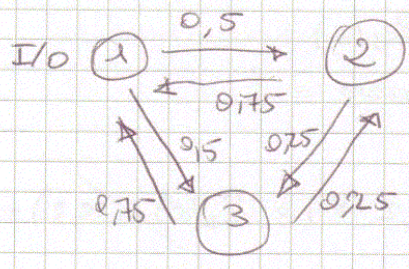
$v_2 = 1{,}2 \quad \mu_2 = 5\,p/h$

$v_1 = 1 \quad \mu = 10\,p/h$

Analisi dei sistemi ad eventi

~~XIX~~ lezione
20/01/2012

ESERCIZIO




$n \to$ deve essere costante

$\mu \to$ esponenziali

$N = 2$

Calcolare $P(n)$ in cui la ~~$P(n_1)$~~ $P(n_1 = 0) = ?$

$V_1 = 1$ (poiché la stazione 1 è quella di ingresso uscita)

$\mu_1 = 4 ph$

METODO 1

$\mu_2 = 6 ph$

$P(n_1 = 0) = P(0,2,0) + P(0,1,1) + P(0,0,2)$ $\mu_3 = 8 ph$

TABELLA CHE RAPPRESENTA ~~$G(N,M)$~~ $G(M,N)$

prima macchina

MACCHINE $\to$ le prime 2 stazioni

$\to$ tutte e tre le stazioni

$\to$ sempre perché sennò la probabilità tende ad infinito

| n° di clienti | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $x_1$ | $x_1 + x_2$ | $x_1 + x_2 + x_3$ |
| 2 | $x_1^2$ | | |
| | $x_1^3$ | | |
| | ... | | |

METODO 2

RIORDINARE $1 \longrightarrow 3$

$V_3 = 1$ $\mu_3 = 4 ph$ $\mu_2 = 6 ph$ $\mu_1 = 8 ph$

mi calcolo $V_1 = 0{,}5 V_3 + 0{,}25 V_2 = 0{,}5 + 0{,}25 V_2$

$V_2 = 0{,}5 V_3 + 0{,}25 V_1 = 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0625 V_2$

$x_a = \dfrac{v_e}{\mu_a}$

$V_3 = \dfrac{0{,}625}{1 - 0{,}0625} = 0{,}66 = V_2$

$x_1 = \dfrac{0{,}66}{8} = 0{,}08\, h = 5 \min$ $x_2 = \dfrac{0{,}66}{6} = 0{,}11\, h = 6{,}6 \min$ $x_3 = \dfrac{1}{4} h = 15''$

poiché 1 cliente a 0 macchine

$$\Rightarrow \quad G(1,1) = \sum_{k=0}^{1} f_1(k) \cdot G(0,1-k) = f_1(0) \cancel{G(0,1)} +$$

$$= + f_1(1) G(0,0) = f_1(1)$$

per definizione è 1

$$G(1,2) = \sum_{k=0}^{2} f_1(k) \cdot G(1,2-k) = f_1(0) \cancel{G(0,2)} + \cancel{f_1(1) G(0,}$$

$$+ \underbrace{f_1(1) \cancel{G(0,1)}}_{=0} + f_1(2) G(0,0)$$

poiché ~~quant'è~~ quant'è la probabilità di assegnare 2 clienti a 0 macchine

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 5 | 11,6 | 26,6 |
| 2 | 25 | ~101 | 502,63 |

$\rightarrow G(N)$

$$G(2,2) = 25 \underbrace{f_2(0)}_{1} + 5 \overbrace{f_2(1)}^{6,6} + f_2(2)$$

$$G(3,2) = 101 + 11,6\, x_3 + x_3^2$$

$$P(n_3 = 0) = \frac{x_3^0 \, G(2,2)}{G(3,2)} = \frac{101}{502,63}$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

analisi dei sistemi ad eventi — XX lezione 24/01/12

DOMANDA ORALE: no dimostrazione

ESERCIZIO (PROB 19) — Reti chiuse NO! → M/M/S, M/M/1

$N=3$

$S_{C/S}=1$


$S_L=2$

$\nu_{C/S}=1$

$\mu_L = 4\,pch$

$\mu_{C/S} = 6\,pch$

2) Valor atteso dei pezzi prodotti per unità di tempo in h

$X_L = ?$ TROUGHPUT

$\hookrightarrow X_{reale_L} = ?$

→ FINITI

$X_{RL} = X_R = \nu_L \cdot X_R = \lambda_L$ → non è quello

$X_{TL} = S_L \mu_L$ → SEMILAVORATI + FINITI

(!) devo stare al numero di volte che i pezzi visitano la stazione

(!) quando non tengo $\nu_L$ sto considerando tutti gli elementi

3) $N_L = \sum_{n_L=0}^{2} n_L P_{n_L}$ → distribuzione di prob. che so calcolare solo se è ultima stazione

DELL'INTERO sistema (X TEORICO) $X_T = \left\{ \frac{S \mu_L}{\nu_i} \right\} \min$

→ IPOTESI $S_i = 1 \quad i = 1 \dots M$ $\qquad S=1 \Rightarrow f(n) = x^N$

$G(M,N) \rightarrow n_M = 0$

$G(M,N) = x^0 G(M-1,N) + x_M\, G(M,N-1)$

$1 = \frac{G(M-1,N)}{G(M,N)} + \frac{x_M\, G(M,N-1)}{G(M,N)}$

prob che nell'ultima staz ci sono 0 clienti $P(n_M=0)$

non è una probabilità

$1 - P(n_M=0) = \frac{x_M G(M,N-1)}{G(M,N)}$ → valor atteso → $X_{reale}$ TROUGHPUT

$X_{reale} = \frac{\text{Penultimo elemento della tabella}}{\text{ultimo elemento tabella}}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

$V_{C/S} = 1 = V_L$

$x_L = \frac{1}{4} h \to 15'$ $\quad x_{C/S} = \frac{1}{6} h \to 10'$

| | C/S | C/S L |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 10 | 25 |
| 2 | 100 | 362,5 |
| 3 | 1000 | 4468,5 |

$100 x_L^0 + 10 x_L + 1 \frac{x^2}{2}$

$G(M,N)$

$1000 + 100 \cdot 15 + 10 \cdot 112,5 + 843,5$

1)

$f_L(1) = x_L$ $\quad f_L(1) = 15$

$f_L(2) = \frac{x_L^2}{2!}$ $\Big\} \frac{x^n}{n!}$ $\quad f_L(2) = 112,5$

$f_L(3) = \frac{x_L^3}{2! \, 2}$ $\Big\} \frac{x^n}{s! \, s^{n-s}}$ $\quad f_L(3) = 843,5$

$x_{R_L} = \frac{362,5}{4468,5} = 0,081 \text{ p/m} \simeq \cancel{0,49 \text{p/h}} \; 4,9 \text{ p/h}$

$x_{\text{Teorico dell'intero sistema}} = \min \left\{ \frac{S_{C/S} \, \mu_{C/S}}{\cancel{V_{C/S}}} ; \frac{S_L \cdot \mu_L}{\cancel{V_L}} \right\} = \{6, 8\}$

$= 6$ p/h

aumentare produttività? → tocco solo $\mu_S$ → lo metto max uguale all'altra stazione

sottoutilizzo del sistema $\quad x_T - x_R = \cancel{4,8} \; 6 - 4,9 = 1$ p/h

$$\frac{S_{C/S} \, \mu_{C/S}}{V_{C/S}} = 8$$

Analisi dei sistemi ad eventi

XX lezione

24/01/12

$\Downarrow$

aumentare la produttività reale

$X_R \longrightarrow$ devo ~~a~~ aumentare gli arrivi (~~se~~ solo se il sist. stazionario)

$$P(\overset{C/S}{1},\overset{L}{1}) = ? = \frac{x_{C/S} \cdot x_L}{\cancel{4468,5}\ 362,5}$$

(1) attenzione visto che i clienti sono 3 non posso usare ~~G~~ $G(N,M)$ 4468 ma prendo quello più piccolo

$$P(1,5) = \frac{f_{C/S}(1) \cdot f_L(5)}{G(2,6)} = 10 \cdot \frac{x_L^5}{212^3}$$

VALOR atteso

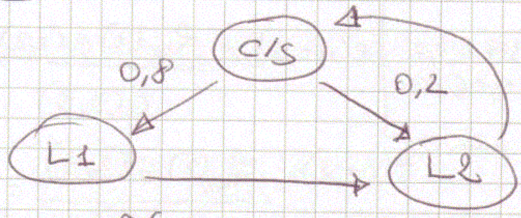
$$N_L = \cancel{x_L} \sum_{n=0}^{3} n\, p_n = 0 + 1 \cdot \frac{\overset{15}{x_L}\ \overset{100}{G(1,2)}}{G(M,N)} + \frac{x_L^2}{\cancel{2}} \frac{\overset{10}{G(1,1)}}{G(M,N)} \cdot \cancel{2} + 3 \frac{x_L^3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{G(1,0)}{G(M,N)}\ 1$$

XXI lezione

25/01/12

ESERCIZIO

$S_{L_S} = 2$




$t(C/S) = 2'$

$t(L1) = 6,25'$

$t(L2) = 5'$

$N = 3$

$v_{C/S} = 1$

$v_{L_1} = 0,8$

$v_{L_2} = 0,2 + 0,8 = 1$

1) Calcolare la $P(C/S = 0,\ L1 = 1,\ L_2 = 2)$
2) Tempo speso in coda su L2
3) Calcolare la produttività di C/S

$x_{C/S} = v \cdot t(C/S) = 2'$

$x_{L_1} = 0,8 \cdot 6,25 = 5'$

$x_{L_2} = 5'$

$f_{L_2}(2) = \frac{5^2}{2} = 12,5$

$f_{L_2}(3) = 31,25$

~~$f_{L_2}(k) =$~~

| | C/S | C/S L1 | C/S L1 L2 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 7 | 12 |
| 2 | 4 | 39 | ~~[illegible]~~ 86,5 |
| 3 | 8 | 203 | 516,75 |

$\Rightarrow$

$G(2,2) = 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 = 39$

$G(2,3) = 8 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 5^3 = 203$

$G(3,3) = 203 + 39 \cdot 5 + 7 \cdot \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{4} = 516{,}75$

$P(0,1,2) = \underbrace{1 \cdot 5}_{f(x_{L_1})} \cdot \underbrace{12{,}5}_{f(x_{L_2})} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 12{,}5}{516{,}75} = 0{,}12$

$\frac{f(x_{L_1})\, f(x_{L_2})}{516{,}75} = 0{,}12 \rightarrow$ è una probabilità $\geq 0$ | $1<$

EQ. DI EQUILIBRIO

$(\mu_{L_1} + 2\mu_{L_2})\, P(0\,1\,2) = 0{,}8\, \mu_{C/S}\, P(1\,0\,2) + \mu_{L_1} P(0\,2\,1) +$
$+ 0{,}2\, \mu_{C/S}\, P(1,1\,1)$

(!) attenzione la freccia che va da L2 a C/S non la considero poiché C/S ha 0 clienti

2) $W_{q_{L_2}} =$

$N_{L_2} = \sum_{n=1}^{3} n P_n = 1 \cdot 0{,}37 + 2 \cdot 0{,}17 + 3 \cdot 0{,}06 = 0{,}92$

$\rightarrow$ se fosse sola

$P(n=1) = \frac{f_{L_2}(1)\, G(2,2)}{G(3,3)} = \frac{5 \cdot 39}{516{,}75} = 0{,}37$

$P(n=2) = \frac{f_{L_2}(2)\, G(2,1)}{G(3,3)} = \frac{12{,}5 \cdot 7}{516{,}75}$

$P(n=3) = 0{,}06$

$x_R = \frac{G(M, N-1)}{G(M,N)} = 0{,}17$ pb/ms

$W_{q_2} = \left(\frac{N}{X} - \frac{1}{\mu}\right) v_{L_2} =$

$= \cancel{v_{L_2}} \cdot \frac{N_{L_2}}{\cancel{v_{L_2}} \cdot x_R} - \frac{v_{L_2}}{\mu_{L_2}} \rightarrow x_{L_2} \simeq \frac{0{,}92}{0{,}17} - 5 = 0{,}41$

3) $W_q \rightarrow ?$

$W_q = \sum v_i W_{q_i}$ $\rightarrow$ è giusto ma non so

$W_q = W - \sum x_i$

$\boxed{W = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{N_i}{\lambda_i} = \sum \frac{v_i \cdot N_i}{v_i X_R} = \frac{N}{X_R}}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/

Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

Analisi dei sistemi ad eventi

XXI lezione
25/01/12

3) $X_{R\,C/S}$ , $X_{T\,C/S}$

$X_{R\,C/S} = r_{C/S} \cdot X_R = 0{,}17\ plmin$

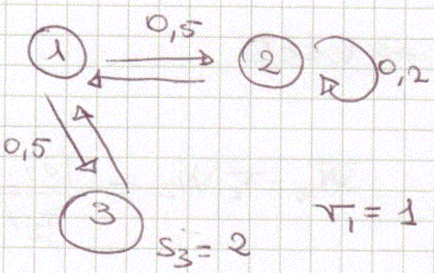
$X_{T\,C/S} = s_{C/S}\ \mu_{C/S} = 0{,}5\ plm$

Ex: no collo di bottiglia

per aumentare $X_{RCS}$, aumento $X_R$ → (il n° clienti nel sistema)
per aumentare $X_{TCS}$ se è lui il collo di bottiglia aumento $X_T$
altrimenti non può aumentare se non cambio la rete

XXII lezione
27/01/12

ESERCIZIO




$s_3 = 2$ $\quad r_1 = 1$

$N = 3$
$E(t_1) = 3'$
$E(t_3) = 4'$
$\mu_2 = 0{,}124\ plm$

1) $N_2 = ?$

$r_2 = 0{,}5 + 0{,}2\,r_2 \to r_2 = 0{,}625$
$r_3 = 0{,}5$

$\boxed{x_i = \frac{r_i}{\mu_i}}$

$x_1 = 3' \quad x_2 = 5' \quad x_3 = 2'$

| | 3 | 31 | 312 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 5 | 10 |
| 2 | 2 | 17 | |
| 3 | 2 | 53 | |

Attenzione ci sono 2 serventi quindi $f_3()$ me lo devo calcolare a parte

$f_3(1) = 2 \quad f_3(2) = 2 = \frac{x_3^2}{2} \quad f_3(3) = \frac{x_3^3}{2 \cdot 2} = 2$

$G(2,2) = 2 + 2 \cdot 3 + 3^2 = 17$

$G(2,3) = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 27 = \cancel{1}53$

$G(3,2) = 17 + 5 \cdot 5 + 5^2 = 67$

$G(3,3) = 53 + 17 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 125 = 388$

2) $x_R$ in un gg (8h) $\qquad x_R = \frac{67}{388} = 0{,}17$ p/m

$N_2 = \sum_{n=0}^{3} n\, P_n \qquad x_R = 0{,}17 \cdot 60 \cdot 8 = 83$ p/gg

deve essere max

$N_2 = 1\left(x_2^1 \cdot \frac{G(2,2)}{G(3,3)}\right) + 2\left(\frac{25 \cdot 5}{388}\right) + 3 \cdot \frac{5^3}{388} = 1{,}83$

3) Per ogni pezzo non venduto abbiamo una perdita di 80

↳ sono $N_2$ ! devo approssimare

quindi il costo è ~~15~~ €160

4) $W_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} = \frac{N_2}{r_2\, x_R} \qquad \overline{W}_2 = r_2 W_2 = \frac{N_2}{\cancel{r_2} x_R} \cancel{r_2} = 10{,}76'$

$W = \frac{N}{x_R} = \frac{3}{0{,}17}$

5) Trascurando il fatto che ci sono 3 clienti

CALCOLARE LO STATO (EQ. EQUIL.) $\qquad$ ① devo vedere se ho più di un cliente poi se ho più di un servente

~~$\mu_1$ P(2,1,4)~~ ~~quelle con~~

USCITE

$(\mu_1 + 0{,}8\,\mu_2 + 2\mu_3)\; P(\underset{0}{2},1,4) =$

ENTRATE

$0{,}5\,\mu_1\, P(1,0,4) + 0{,}5\,\mu_1\, P(1,1,3) + 0{,}2\,\mu_2\, P(0,1,4)$

$\min(S_i, S_i)\, \mu_i = r_i$

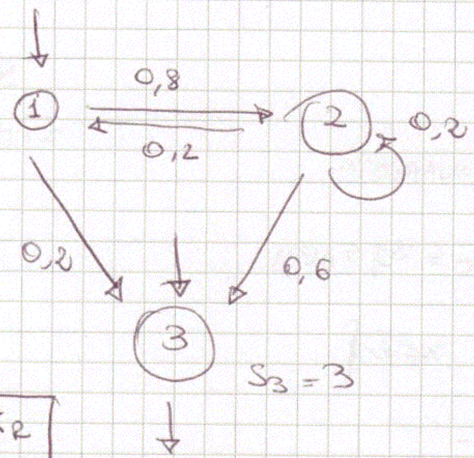
Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Ludovica Adacher
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2011-2012

analisi dei sistemi ad eventi

XXII lezione
27/01/12

$$p(0,1,4) = \frac{x_2 \cdot \frac{x_3^4}{2!\,2^2}}{G(3,5)}$$

ESERCIZIO




$S_3 = 3$

$\lambda_3 = \lambda_1$
$\mu_1 = 20\ plm$
$\mu_2 = 30\ plm$
$\mu_2 = 30\ plm$
$\mu_3 = 15\ plm$

$\boxed{x_T > x_R}$

$\boxed{x_R = \frac{x_T}{3}}$ → CONDIZIONE

$$W_{q_3} = \frac{L_3}{\lambda'_3}$$

$$\begin{cases} x_{R_2} \overset{?}{=} \lambda'_2 \\ x_{T_2} = S_2 \mu_2 \end{cases}$$

$\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda$

$\lambda'_1 = \lambda + 0{,}2\,\lambda'_2$

$\lambda'_2 = 0{,}8\,\lambda'_1 + 0{,}2\,\lambda'_2$

$\lambda'_3 = 0{,}2\,\lambda' + 0{,}6\,\lambda'_2 + \lambda$

$\lambda'_1 =$

$\lambda_1^2 = \lambda'_2$

$\lambda'_1 = \frac{1}{0{,}8}\lambda$

$\lambda'_2 = \frac{1}{0{,}8}\lambda$

$\lambda'_3 = 2\lambda$

$1{,}25\,\lambda < 20 \qquad \lambda < 16$

$2\lambda < 45 \qquad \lambda < 22{,}5$

$\lambda = \frac{16}{3} = 5{,}3\ plm \qquad x_T = \min\left\{\frac{S_i \mu_i}{r_i}\right\}$

$$r_i = \frac{\lambda'_i}{\lambda_{EST}} = \frac{\lambda'_i}{2\lambda} = \min\left\{\frac{\overset{32}{20}}{0{,}625}, \frac{30}{0{,}625}, 45\right\}$$

$x_e$ = somma dei $\lambda$ esterni $= 2\lambda$

$$x_R = 2\lambda = \frac{x_T}{3} \qquad \lambda = \frac{x_T}{6} = \frac{32}{6} = 5,3$$

$$x_R = x_T - \varepsilon$$

di quanto aumentare reale il throughput reale senza cambiare la rete

$$\frac{S_1\, \mu_1}{v_1} = 45$$

XXIII lezione
1/02/12

$\boxed{x_R < x_T}$ CONDIZIONI DI STAZIONARIETÀ

$$x_R = \lambda = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \qquad \lambda_T = x_T = 33,5 \text{ p/h}$$

$$\lambda_{MAX} = \lambda_T - \varepsilon = 33 \text{ p/h}$$

ESEMPIO - CAMBIO PRODUTTIVITÀ -

RETI CHIUSE

| N\M | 1 2 .. M |
|---|---|
| : | |
| N | |
| N+1 | Y |
| | X |
| N+1 | Z |

$$x_R = \frac{Y}{X} \qquad x'_R = \frac{X}{Z}$$

ESERCIZIO

$$P(0,1,3)^{M/M/S} = \underset{\substack{\uparrow \\ P_1(0)}}{(1-\rho)} \cdot \rho_2\, P_2(0) \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^3}{3!} \cdot P_3(0)$$

(!) attenzione $P_1(0)$ non è $= 1$ ma è $(1-\rho)$

Analisi dei sistemi ad eventi

XXIII lezione
1/02/12

* Domanda d'esame

→ $N_2 = ?$

$P(N_3 = 3) \quad \dfrac{f_3(3)}{G(3,3)} \cdot G(2,0)$

(!) non devo fare due tabelle perché la seconda non dipende dalla tabella

FORMULE FORNITE

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0 \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!\, s^{n-s}} \cdot P_0 \end{cases}$$

JACKSON: aggiungo l'effettivo

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right) \cdot P_0}{n!} & n > s \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^n}{s!\, s^{n-s}} & n < s \end{cases}$$

GORDON: metto $x_i$ e tolgo $P_0$

$$\begin{cases} \dfrac{x^n}{n!} & n < s \\[2ex] \dfrac{x^n}{s!\, s^{n-s}} & n > s \end{cases}$$

(!) se mi chiedesse di aumentare il THROUGHPUT reale della stazione che non è collo di bottiglia devo aumentare il $\mu$ di tutte ~~le stazioni~~ e due le stazioni