Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria & Combinatoria

-Preparazione Esame-

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

GEOMETRIA E COMBINATORIA : TEORIA

PRIMA PARTE

→ INSIEME DELLE PARTI : $P(A)$ ha 2^n elementi

→ OPERAZIONI TRA INSIEMI :

INTERSEZIONE $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$
UNIONE $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
DIFFERENZA $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$
COMPLEMENTARE $X \setminus E = \complement_X E \perp E \text{ in } X$

VERIFICANO LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA, ASSOCIATIVA, DISTRIBUTIVA

→ PRODOTTO CARTESIANO: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ $A \times B \neq B \times A$

→ LEGGI DI DE MORGAN
1) $\complement_X(E \cap F) = (\complement_X E) \cup (\complement_X F)$
2) $\complement_X(E \cup F) = (\complement_X E) \cap (\complement_X F)$

→ APPLICAZIONI FRA INSIEMI
FUNZIONE INIETTIVA : $\forall x,y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
FUNZIONE SURIETTIVA : $\forall y \in B \ \exists x \in A \ / \ f(x) = y$
FUNZIONE BIETTIVA : $\forall y \in B \ \exists! \ x \in A \ / \ f(x) = y$
FUNZIONE INVERSA : SI PUÒ DEFINIRE $\Leftrightarrow$ LA FUNZIONE DEVE ESSERE BIETTIVA
PRODOTTO OPERATORIO : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

→ RELAZIONI SUGLI INSIEMI (verificano queste proprietà)
1) RIFLESSIVA : $\forall a \in A : a \rho a$
2) SIMMETRICA : $a \rho b \Rightarrow b \rho a$
3) ANTISIMMETRICA : $a \rho b, b \rho a \Rightarrow a = b$
4) TRANSITIVA : $a \rho b, b \rho c \Rightarrow a \rho c$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA : $\Leftrightarrow$ VERIFICA 1), 2), 4)
RELAZIONI D'ORDINE : $\Leftrightarrow$ VERIFICA 1), 3), 4)

CLASSE DI EQUIVALENZA : $[a] = \{b \in A \ / \ a \rho b\}$ ā rappr. classe
PROPRIETÀ CLASSI : 1) $\forall a \in A \mid a \in [a]$
2) $a \rho b \Leftrightarrow [a] = [b]$
3) $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[a] = [b]$
PARTIZIONE

INSIEME QUOZIENTE : $A/\rho = \{[a] \ / \ a \in A\}$

CONGRUENZA MODULO m : (è una relazione di equivalenza)
$\mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, m, INTERO / $m \geq 2$ $x \equiv y \bmod m \Leftrightarrow x - y = km$, $k \in \mathbb{Z}$
TEOREMA EUCLIDEO : $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \ \exists! \ q, r \in \mathbb{Z} \ / \ a = bq + r$ $0 \leq r < |b|$
$x = q_1 m + r_1$ $y = q_2 m + r_2$ $x - y = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)$

PROPRIETÀ CONGRUENZA MODULO m : $\mathbb{Z}/_{\equiv m} = \{[0], [1], \dots [m-1]\} = \mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots \overline{m-1}\}$

1) se $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \bmod m$
2) se $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m \Rightarrow ac \equiv bd \bmod m$
3) se $a \equiv b \bmod m \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m$
4) se $ta \equiv_{mt} tb$ $m_{t m} \Rightarrow a \equiv b \bmod m$

PRODOTTO DI MATRICI: RIGHE PER COLONNE, (!) IL NUMERO DI COLONNE DELLA PRIMA MATRICE DEVE ESSERE UGUALE AL NUMERO DI RIGHE DELLA SECONDA
→ NON VERIFICA LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA
→ VERIFICA LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA E DISTRIBUTIVA
(!) DUE MATRICI DIVERSE DALLA MATRICE NULLA MOLTIPLICATE TRA LORO POSSONO DARE M NULLA

→ MATRICE IDENTICA: UNITÀ MOLTIPLICATIVA
$A \in M_n(\mathbb{R})$ SI DICE INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ $A \cdot X = X \cdot A = I$ $\quad X \in M_n(\mathbb{R})$ (SE ESISTE È UNICA)

DETERMINANTE: (SI PUÒ CALCOLARE SOLAMENTE DI UNA MATRICE QUADRATA)
REGOLA DI SARRUS:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$

COMPLEMENTO ALGEBRICO: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \bar{A}$ DOVE $\bar{A}$ È LA MATRICE DI ORDINE $n-1$ OTTENUTA DA A ELIMINANDO LA i-ESIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA

TEOREMA DI LAPLACE: $A \in M_n(\mathbb{R})$ ALLORA $\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$
POSSO SVILUPPARE LAPLACE SECONDO QUALSIASI RIGA O COLONNA

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI:
1) SE A HA UNA RIGA O COLONNA NULLA $\Rightarrow \det A = 0$
2) SE A ~~SE A~~ HA DUE RIGHE (COLONNE PROPORZIONALI) $\Rightarrow \det A = 0$
3) SE IN A SI SCAMBIANO DUE RIGHE (COLONNE) SI OTTIENE UNA MATRICE $\bar{A}$ / $\det \bar{A} = -\det A$
4) SE $A = (a_{ij})$ È DIAGONALE $\Rightarrow \det A^T = \det A$
6) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (TEOREMA DI BINET)

MATRICE AGGIUNTA (A QUADRATA). SI DEFINISCE MATRICE AGGIUNTA DI A E SI DENOTA A^* LA MATRICE TRASPOSTA DALLA MATRICE I CUI ELEMENTI SONO I COMPLEMENTI ALGEBRICI DEGLI ELEMENTI DI A ~~OVVERO~~.

TEOREMA (INVERTIBILITÀ): $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ È INVERTIBILE $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

ALGORITMO DELLA RIDUZIONE A GRADINI: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, SI DEFINISCE PIVOT DELLA RIGA R_i IL SUO PRIMO ELEMENTO NON NULLO. $A \in M_{m \times n}$ SI DICE MATRICE A GRADINI SE IL PIVOT DELLA RIGA R_{i+1} SI TROVA A DESTRA DELLA RIGA R_i
OPERAZIONI SULLE RIGHE:
1) SCAMBIARE DUE RIGHE
2) MOLTIPLICARE UNA RIGA PER UN NUMERO REALE NON NULLO
3) SOSTITUIRE UNA RIGA CON LA SOMMA DELLA RIGA STESSA E DI UN MULTIPLO DI UN'ALTRA $R_i \to R_i + kR$

FORMA CANONICA SPECIALE: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ È IN FORMA CANONICA SPECIALE $\Rightarrow$
1) È A GRADINI
2) I PIVOT SONO TUTTI UGUALI A 1
3) IN OGNI COLONNA CON UN PIVOT, IL PIVOT È L'UNICO ELEMENTO NON NULLO

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \; \underbrace{\begin{matrix} -4 & 4 \\ -3 & 1 \end{matrix}}_{A} \right)$$

RANGO DI UNA MATRICE: SI DICE CHE A HA RANGO p E SI SCRIVE $rg A = p$ SE $\exists$ UN MINORE DI ORDINE p NON NULLO E SONO NULLI TUTTI I MINORI DI ORDINE SUPERIORE $\Rightarrow$ (!) $rg A$ È IL NUMERO DI PIVOT DI UNA RIDOTTA A GRADINI

TEOREMA DEGLI ORLATI: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ HA RANGO $p \Leftrightarrow \exists$ UN MINORE DI ORDINE p NON NULLO E SONO NULLI TUTTI I MINORI DI ORDINE $p+1$ ORLANDO IL MINORE DI ORDINE p NON NULLO FISSATO

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

GEOMETRIA E COMBINATORIA

SECONDA PARTE

RELAZIONI D'ORDINE: (sussistono le seguenti proprietà)
1) RIFLESSIVA: $\forall a \in A$: $a \rho a$
2) ANTISIMMETRICA: $a\rho b$, $b \rho a \Rightarrow a = b$
3) TRANSITIVA: $a \rho b$, $b \rho c \Rightarrow a \rho c$

→ RELAZIONE D'ORDINE TOTALE SE $\forall a,b \in A$ SI HA $a\rho b$ o $b \rho a$
→ REL D'ORDINE PARZIALE SE $\exists a,b \in A$ CHE NON SONO IN RELAZIONE
→ INSIEME TOTALMENTE ORDINATO : SE ρ È UN ORDINE TOTALE
→ INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO SE ρ È UN ORDINE TOTALE

RETICOLO: UN INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO $(A, \leq)$ SI DICE UN RETICOLO SE $\forall a,b \in A$, ESISTONO SIA $\sup(\{a,b\})$ CHE $\inf(\{a,b\})$
(!) SUP ($\vee$) E INF ($\wedge$) SE ESISTONO SONO UNICI

PROPRIETÀ DEI RETICOLI:
1) COMMUTATIVA: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ $\forall a,b \in R$
2) ASSOCIATIVA: $(a\wedge b)\wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3) ASSORBIMENTO: $a \vee (b \wedge a) = a$ $a \wedge (b \vee a) = a$
4) IDEMPOTENZA $a \vee a = a$ e $a \wedge a = a$

→ IN GENERALE IN UN RETICOLO NON VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ
DISTRIBUTIVA: 1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
} SE VALGONO IL RETICOLO È DETTO DISTRIBUTIVO

RETICOLO COMPLEMENTATO: SE $\forall a \in R$ ESISTE ALMENO UN $b \in R$ TALE CHE $a \vee b = M = 1$ (massimo) $a \wedge b = m = 0$ (minimo) → devono essere soddisfatte entrambe

RETICOLO DI BOOLE $\Leftrightarrow$ IL RETICOLO È SIA DISTRIBUTIVO CHE COMPLEMENTATO
(!) UN RETICOLO BOOLEANO È UN ALGEBRA DI BOOLE

ALGEBRA DI BOOLE: È UN INSIEME A DOTATO DI DUE OPERAZIONI BINARIE $\wedge, \vee$ E DI UN APPLICAZIONE $'$: $A \to A'$, $a \mapsto a'$ E DI DUE ELEMENTI PARTICOLARI CHIAMATI 0, e 1 TALE CHE SONO VERIFICATE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:
1) ASSOCIATIVA: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a\wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
2) COMMUTATIVA: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$
3) DISTRIBUTIVA: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
4) ASSORBIMENTO: $a \vee (a \wedge b) = a$; $a \wedge (a \vee b) = a$
5) IDEMPOTENZA: $a \wedge a' = 0$; $a \wedge (a \vee b) = 1$

(!) UN RETICOLO BOOLEANO È UN ALGEBRA DI BOOLE. D'ALTRO CANTO SU UN ALGEBRA DI BOOLE POSSO DEFINIRE UNA RELAZIONE D'ORDINE IN QUESTO MODO: $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. RISPETTO A QUESTA RELAZIONE D'ORDINE L'ALGEBRA DI BOOLE È UN RETICOLO BOOLEANO

TEOREMA DI STONE: OGNI ALGEBRA DI BOOLE FINITA (A È FINITA) È "ISOMORFA" A UN ~~AdB~~ ALGEBRA DI TIPO $P(X)$, X INSIEME FINITO

SOLUZIONI SISTEMI LINEARI

$rg\,A = rg\,C = n \Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE UNA SOLA SOLUZIONE
$rg\,A = rg\,C = p < n \Rightarrow$ INFINITE SOLUZIONI DIPENDENTI DA $n-p$ PARAMETRI (∞^{n-p} SOLUZ)

SOTTOSPAZI : V SPAZIO VETTORIALE REALE. S SOTTOINSIEME NON VUOTO DI V.
S SI DICE SOTTOSPAZIO DI V SE È UNO SPAZIO VETTORIALE RISPETTO ALLE OPERAZIONI DEFINITE IN V $(+, \cdot)$

(!) S È UN SOTTOSPAZIO DI V $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall v, w \in S : \alpha v + \beta w \in S$
$\rightarrow$ S,T SOTTOSPAZI DI V ALLORA $S \cap T$ È UN SOTTOSPAZIO DI V

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

GEOMETRIA E COMBINATORIA

TERZA PARTE

ALGEBRA LINEARE

VETTORE: SEGMENTO ORIENTATO; DIREZIONE, VERSO, MODULO
DUE VETTORI SODDISFANO LA **RELAZIONE DI EQUIPOLLENZA** $\Leftrightarrow$ HANNO LA STESSA DIREZIONE, VERSO E MODULO (È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA)

$(V, +)$ $\vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v}+\vec{w}$ PROPRIETÀ: (OPERAZIONE INTERNA)
1) COMMUTATIVA $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$
2) ASSOCIATIVA $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
3) $\exists\ \vec{0} \in V$. ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA SOMMA
4) $\forall\ \vec{v} \in V \quad \exists -\vec{v} \in V$

$(V, \cdot)$ **PRODOTTO ESTERNO** $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V : \alpha\vec{v} \in V$
$\alpha\vec{v}$ → direzione: quella di $\vec{v}$
→ VERSO: DI $\vec{v}$ SE $\alpha > 0$ ALTRIMENTI PER $\alpha < 0$ QUELLO OPPOSTO
→ MODULO: $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO ESTERNO
1) ASSOCIATIVA, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\ \vec{v} \in V: (\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
2) DISTRIBUTIVA: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V : \alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

PRODOTTO SCALARE: (NON È UN VETTORE) $\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$
$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha \quad | \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j})(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx' + yy'$
PROPRIETÀ: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
1) COMMUTATIVA
2) ASSOCIATIVA $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\alpha\vec{v})\vec{w} = \vec{v}(\alpha\vec{w})$
3) DISTRIBUTIVA $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
4) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad (\vec{v}, \vec{w} \neq 0) \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \quad (\cos\alpha = \pi/2)$

PRODOTTO VETTORIALE: $\vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v} \wedge \vec{w} \in V$
$\vec{v} \wedge \vec{w}$ → DIREZIONE: PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DA $\vec{v}$ e $\vec{w}$
→ VERSO: $\vec{v}$ ROTAZIONE SU $\vec{w}$ IN SENSO ANTIORARIO
→ MODULO: $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (AREA PARALLELOGRAMMA)
PROPRIETÀ: $\vec{v} \wedge \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \Rightarrow (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$
1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$
2) $\forall K \in \mathbb{R} : K(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (K\vec{v}) \wedge \vec{w}$
3) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
4) $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ ($\vec{v}$ e $\vec{w}$ NON NULLI) $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$

→ (!) IL PRODOTTO VETTORIALE È IL DETERMINANTE DELLA MATRICE CHE HA I VETTORI COME RI…

MATRICI:
- MATRICE QUADRATA $\Leftrightarrow$ IL NUMERO DELLE RIGHE = NUMERO COLONNE
- MATRICE DIAGONALE $\Leftrightarrow$ GLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINC. SONO GLI UNICI ELE. NON NULLI (PER LE MATRICI QUADRATE)
- MATRICE IDENTICA $\Leftrightarrow$ PRESENTA TUTTI 1 NELLA DIAGONALE PRINCIP. E NEL RESTO 0
- MATRICE TRASPOSTA $\Rightarrow A^T$ LA MATRICE $n \times m$ OTTENUTA SCAMBIANDO LE RIGHE CON LE COLONNE

PER DARE LA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE BISOGNA DEFINIRE UN **OPERAZIONE INTERNA** E UN **PRODOTTO ESTERNO** $\Rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot$ SPAZIO VETTORIALE REALE

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

TEOREMA: $f: V \to V$ L'ENDOMORFISMO È DIAGONALIZZABILE $\iff \exists$ UNA BASE B, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ DI V COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI f

dimostrazione: ($\Rightarrow$) f è DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow \exists B = \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DI V / $A_f^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$f(v_1) = \lambda v_1 + 0v_2 + \dots + 0 v_n$
$f(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n$
$f(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_m v_n$

v_1, v_n SONO AUTOVETTORI $\Rightarrow$ BASE COSTITUITA DA AUTOVETTORI

($\Leftarrow$) BASTA CHE INVERTO FRECCE NELL'ALTRO VERSO

TEOREMA: $f: V \to V$ ENDOMORFISMO FISSATO B, base di V, $A = A^B_f$
ALLORA: $\lambda \in \mathbb{R}$ È UN AUTOVALORE DI $f \iff \det(A - \lambda I)$

TEOREMA: $f: V \to V$ ENDOMORFISMO B BASE DI V $A = A^B f$ ALLORA: $\lambda \in \mathbb{R}$ È UN AUTOVALORE DI $f \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Dimostrazione: $\lambda \in \mathbb{R}$ è UN AUTOVALORE DI $f \iff \exists v \in V$, $v \neq 0_V$ TALE CHE $f(v) = \lambda v$ $(v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$

$\iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

HA AUTOSOLUZIONI $\iff \det(A - \lambda I) = 0$

TEOREMA: $A = A^B f$, $A' = A^{B'} f$ B, B' BASI DI V ALLORA $\det(A' - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$

dimostrazione: poiché sono simili $A' = C^{-1} A \cdot C$

$\det(A' - \lambda I) = \det(C^{-1} A C - C^{-1} \lambda I C) = \det(C^{-1}(A - \lambda I) C) =$
$= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \det C = \det(A - \lambda I)$

POLINOMIO CARATTERISTICO: $\det(A - \lambda I)$ POLINOMIO IN λ DI GRADO n CHE PRENDE IL NOME DI. $\det(A - \lambda I) = 0$ SI DICE EQUAZIONE CARATTERISTICA
GLI AUTOVALORI DI f SONO LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO
$\bar\lambda \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE DI f SI DICE MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI $\bar\lambda$ E SI DENOTA $m_a(\bar\lambda)$ IL NUMERO DELLE RADICI COINCIDENTI

TEOREMA: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k \in \mathbb{R}$ AUTOVALORI DISTINTI DI f, $v_1, \dots v_k \in V$ AUTOVETTORI RELATIVI A $\lambda_1, \dots \lambda_k$ ALLORA $v_1, \dots v_k$ LIN. INDIPENDENTI

COROLLARIO: f ENDOMORFISMO DI V, $\dim V = n$ $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ AUTOVALORI DISTINTI DI $f \Rightarrow f$ È DIAGONALIZZABILE

AUTOSPAZIO: f ENDOMORFISMO DI V, $\bar\lambda$ AUTOVALORE DI f, SI DEFINISCE AUTOSPAZIO RELATIVO A $\bar\lambda$ E SI DENOTA $V_{\bar\lambda}$ L'INSIEME $V_{\bar\lambda} = \{v \in V / f(v) = \bar\lambda v\}$

DIMOSTRAZIONI: $V_{\bar\lambda}$ È UN AUTOSPAZIO DI V
$\forall v, w \in V_{\bar\lambda} \Rightarrow f(v+w) = f(v) + f(w) \Rightarrow v + w \in V_{\bar\lambda}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V_{\bar\lambda} \Rightarrow f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\bar\lambda v) = \bar\lambda(\alpha v)$
$\Rightarrow \alpha v \in V_{\bar\lambda}$

GEOMETRIA E COMBINATORIA

TERZA PARTE

SPAZIO VETTORIALE: PROPRIETÀ (REALE)

$+ : V \times V \to V$
$(v, w) \mapsto v + w$

1) proprietà commutativa
2) proprietà associativa (+)
3) $\exists\, 0_V \in V$ elemento neutro rispetto alla somma
4) $\forall v \in V \ \exists -v \in V \ / \ v + (-v) = 0_V$
5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V : \alpha (v + w) = \alpha v + \alpha w$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
$(\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v$

6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V : (\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$
7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V : (\alpha \beta) v = \alpha (\beta v)$
8) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI: due vettori sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri
- v_1, v_2 linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ sono proporzionali

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI → due vettori sono linearmente ~~ht~~ indipendenti $\Leftrightarrow$ il rango della matrice che li ha come righe o colonne è k
→ linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare nulla è quella a coefficienti tutti nulli

BASE: V, spazio vettoriale reale, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sottoinsieme di V
B si dice base di V se:
1) i vettori di B sono linearmente indipendenti
2) $\forall v \in V : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \ x_i \in \mathbb{R}$ (B genera V)

→ TEOREMA: V, spazio vettoriale reale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora ogni altra base di V ha n vettori → $n = \dim V \Rightarrow$ massimo numero di vettori linearmente indipendenti

SISTEMI LINEARI

ENNUPLA: $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema se soddisfa tutte le soluzioni del sistema
SISTEMA QUADRATO: numero delle equazioni = numero delle incognite
SISTEMA OMOGENEO: i termini noti sono nulli $(AX = 0)$ è sempre compatibile poiché ammette sempre almeno la soluzione nulla
SISTEMA COMPATIBILE: ~~ah~~ quando ammette soluzioni

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Il sistema $AX = B$ di m equazioni in n incognite è compatibile $\Leftrightarrow$ il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa ovvero $rg\,A = rg\,C$

PROPRIETÀ: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ allora
- $rg\,A$ = massimo ordine di un minore non nullo
- $rg\,A$ = numero dei pivot di una matrice a gradini equivalente per righe ad A
- $rg\,A$ = massimo numero di colonne linearmente indipendenti
- $rg\,A$ = massimo numero di righe linearmente ...

TEOREMA DI CRAMER: $AX = B$ sistema quadrato in n incognite $\Rightarrow$ il sistema ammette una sola soluzione $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
Risulta

$$\bar{x}_1 = \frac{\det \bar{A}_1}{\det A}, \ \dots, \ \bar{x}_n = \frac{\det \bar{A}_n}{\det A}$$

dove $\bar{A}_i$ è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti

→ $\dim V = \dim Ker f + \dim Im f$: SIANO V e V' DUE SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{R}$ ED f UN APPLICAZIONE LINEARE DI V in V' $\Rightarrow \dim V = \dim Ker$ + dim

dimostrazione: SUPPONENDO CHE: $\dim Ker f = h$, SIA $B = \{v_1, v_2, \dots v_h\}$ UNA BASE DI KERF, ESTENDIAMO B A $\bar{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_{h+1}, \dots v_n\}$ BASE DI V, $B' = \{f(v_{h+1}) \dots f(v_n)\}$ è UNA BASE DI $Im f$

→ SE V È UNO SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{R}$ DI DIMENSIONE n, $B = \{v_1, \dots v_n\}$ e $\bar{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ DUE BASI DI V ED f UN ENDOMORFISMO DI V, DENOTATE CON A, e $\bar{A}$ LE MATRICI ASSOCIATE A f RISPETTO A B e $\bar{B}$ RISULTA:
$\bar{A} = C^{-1} A C$ DOVE C È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DA B A $\bar{B}$

dimostrazione: $C = A_{i_V}^{\bar{B}B}$, INOLTRE $A = A_f^{BB}$ e $\bar{A} = A_f^{\bar{B}\bar{B}}$, POICHÉ $f = i_V \circ f \circ i_V$
OVVERO $V \xrightarrow{i_V} V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{i_V} V$ FISSANDO $\bar{B}, B, B, e \bar{B}$ COME BASI IN V
OVVERO $\bar{B} \quad B \quad B \quad \bar{B}$
$\bar{A} = A_f^{\bar{B}\bar{B}} = A_{i_V}^{B\bar{B}} \cdot A_f^{BB} \cdot A_{i_V}^{\bar{B}B} = C^{-1} A \cdot C$

→ MATRICI SIMILI: SE $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ SONO DUE MATRICI SIMILI ALLORA $\det A = \det A'$ e $rg A = rg A'$

dimostrazione: $A' = C^{-1} A C$ DAL TEOREMA DI BINET SEGUE CHE ~~$\det A' = \det C^{-1}$~~
$\det A' = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = (\det C)^{-1} \cdot \det C \cdot \det A = \det A$
$\det A = \det A' = 0 \Rightarrow rg A = \dim Im f = rg A'$

→ AUTOVALORI: SE V È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ DI $\dim = n$ f è UN ENDOMORFISMO DI V, v UN AUTOVETTORE DI f e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ TALI CHE $f(v) = \lambda_1 v$ e $f(v) = \lambda_2 v$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

dimostrazione: $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ SEGUE CHE $(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0_V$ $v \neq 0_V \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

→ AUTOSPAZIO: IL SOTTOINSIEME $V_\lambda = \{v \in V / f(v) = \lambda v\}$ è UN SOTTOSPAZIO.

dimostrazione: $V_\lambda \neq \emptyset$ POICHÉ $0_V \in V_\lambda$ ESSENDO $f(0_V) = \lambda 0_V = 0_V$, SE $v, w \in V_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ RISULTA: $f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$ e $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \Rightarrow v+w, \alpha v \in V_\lambda$

→ SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n SU $\mathbb{R}$, f è UN ENDOMORFISMO DI V e A UNA MATRICE ASSOCIATA A f RISPETTO A DUE BASI DI V $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det(A' - \lambda I)$

dimostrazione: POICHÉ A e A' SONO MATRICI ASSOCIATE AD UNO STESSO ENDOMORFISMO SONO SIMILI SI HA $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$
$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det(C^{-1}(A - \lambda I) \cdot C) = \det(C^{-1} \cdot A \cdot C - \lambda C^{-1} \cdot I \cdot C) =$
$= \det(A' - \lambda I)$

$Im f$ SOTTOSPAZIO DI V'

dimostrazione: $\forall v', w' \in Im f \Rightarrow v' + w' \in Im f \Rightarrow \exists\, v, w \in V / f(v) = v'$, $f(w) = w' \Rightarrow v' + w' = f(v) + f(w) = f(v+w) \in Im f$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v' \in Im f \Rightarrow \alpha v' \in Im f \Rightarrow \exists\, v \in V / f(v) = v' \Rightarrow \alpha v' = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in Im f$

KERf SOTTOSPAZIO DI V:

dimostrazione: $\forall v, w \in Ker f \Rightarrow f(v+w) \in Ker f$? $f(v+w) = f(v) + f(w) = 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'} \Rightarrow v + w \in Ker f$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in Ker f \Rightarrow f(\alpha v) \in Ker f \{0_{V'}\}$?
$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \cdot 0_{V'} = 0_{V'} \Rightarrow \alpha v \in Ker f$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

GEOMETRIA E COMBINATORIA

QUARTA PARTE

TRASFORMAZIONI LINEARI

APPLICAZIONE LINEARE: V e V' spazi vettoriali reali $f: V \longrightarrow V'$
se soddisfa le seguenti proprietà
1) $\forall v, w \in V \quad : f(v+w) = f(v) + f(w)$
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad : f(\alpha v) = \alpha f(v)$

MODO COMPATTO
$\Rightarrow f: V \longrightarrow V'$ è lineare $\Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$
$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$

ISOMORFISMO: applicazione lineare biettiva $f: V \to V'$
ENDOMORFISMO: applicazione lineare $f: V \to V$
AUTOMORFISMO: endomorfismo biettivo

$\rightarrow$ **DIMOSTRAZIONI** $f: V \longrightarrow V'$ lineare f iniettiva $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_V\}$
$\Rightarrow$ $z \in \ker f \Rightarrow f(z) = 0_V = f(0_V) \Rightarrow z = 0_V \Rightarrow \ker f = \{0_V\}$
$\Leftarrow$ $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v) - f(w) = 0_V \Rightarrow f(v-w) = 0_V \Rightarrow$
$v - w \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow v - w = 0_V \Rightarrow v = w$

TEOREMA: V spazio vettoriale reale $\dim V = n \Rightarrow V$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$

DIPENDENZA: $f: V \to V'$ lineare $v_1, \dots, v_k \in V$ linearmente dipendenti $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_k) \in V'$ linearmente dipendenti

dimostrazione: $v_1 \dots v_k$ lin. dip $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ con
$\alpha_1, \dots \alpha_k$ non tutti nulli $\Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0_V \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) = 0_V$
$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli $\Rightarrow f(v_1), \dots f(v_k)$ lin. dip.

INDIPENDENZA: $f: V \to V'$ lineare iniettiva $v_1, \dots, v_k \in V$ lin. indip.
$\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_k) \in V'$ linear. indipendenti

dimostrazione: $\beta_1 f(v_1) + \dots + \beta_k f(v_k) = 0_V \Rightarrow f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k) =$
$= 0_V \Rightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = 0_V$
$\beta_1 = \dots = \beta_k = 0 \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_k)$ linear. indipendenti

TEOREMA: V, V' spazi vettoriali reali $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V
$w_1, \dots, w_n \in V' \Rightarrow \exists!\, f: V \longrightarrow V'$ lineare $/ f(v_1) = w_1,$
$\dots, f(v_n) = w_n$

Dimostrazione: $f: V \to V'$ $\quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$\Rightarrow$ **DIMOSTRAZIONI**: V, V' spazio vettoriale reale $\dim V = \dim V' = n \Rightarrow$
$\Rightarrow V$ e V' sono isomorfi
$\exists\, f: V \to \mathbb{R}^n$ isomorfo $\quad \exists\, g: V' \to \mathbb{R}^n$ isomorfo
$g^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow V'$ isomorfo $\quad V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g^{-1}} V'$

DIAGONALIZZABILITÀ: $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice diagonalizzabile se $\exists\, C \in$
$M_n(\mathbb{R})$ invertibile $/ C^{-1} \cdot A \cdot C = D$ diagonale

$f: V \to V$ endomorfismo $v \in V$, $v \neq 0_V$ si dice ~~autovalore~~
autovettore di f relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se $f(v) = \lambda v$

OPERAZIONI CONGRUENZA MODULO m: $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

SOMMA:
1) COMMUTATIVA: $\bar{x}+\bar{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \bar{y}+\bar{x}$
2) ASSOCIATIVA: $\bar{x}+(\overline{y+z}) = (\overline{x+y})+\bar{z}$
3) $\exists\ \bar{0} \in \mathbb{Z}_m$ ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA SOMMA
4) $\forall\ \bar{x} \in \mathbb{Z}_m\ \exists\ -\bar{x} = \overline{-x} \in \mathbb{Z}_m$

$(\mathbb{Z}_m, +)$ GRUPPO **ABELIANO**

PRODOTTO:
5) ASSOCIATIVA
6) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $\bar{x}\cdot(\bar{y}+\bar{z}) = \bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{x}\cdot\bar{z}$
7) $\exists\ \bar{1} \in \mathbb{Z}_m$ UNITÀ MOLTIPLICATIVA $\bar{x}\cdot\bar{1} = \overline{x\cdot 1} = \bar{x}$
8) COMMUTATIVO

SE SODDISFA TUTTE 8 SI DEF. **ANELLO COMMUTAT. UNITAR**

TEOREMI CONGRUENZA MODULO m:

a) $ax \equiv b \bmod m$ AMMETTE SOLUZIONI $\Leftrightarrow d = (a, m) \mid b$

b) $ax \equiv b \bmod m$, x' È UNA SUA SOLUZIONE $\Rightarrow$ OGNI ALTRA SOLUZIONE È DEL TIPO $x' + k \cdot \frac{m}{(a,m)}$

c) SE $d = (a, m)$ HA ESATTAMENTE d SOLUZIONI NON CONGRUE FRA LORO MOD m

d) $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{a}$ È INVERTIBILE $\Rightarrow$ ~~$\exists\ \bar{b} \in \mathbb{Z}_m / \bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{1}$~~ in $\mathbb{Z}_m \Leftrightarrow (a, m) = 1$

CAMPO: SI DICE CAMPO UN ANELLO COMMUTATIVO UNITARIO CON UNITÀ MOLTIPLICATIVA 1, E POSSIEDE L'INVERSO

$\mathbb{Z}_p$ È UN CAMPO $\Leftrightarrow$ p È PRIMO (VERIFICA LE STESSE PR. CONGRUENZA MOD m)

TEOREMI PER TROVARE L'INVERSO

- PICCOLO TEOREMA DI **FERMAT**: $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, p = primo
  COROLLARIO $\to$ $\mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{a}^{-1} = \overline{a^{p-2}}$
- TEOREMA DI **EULERO**: $(a, m) = 1$ (a PRIMO CON m) $\Rightarrow a^{\Phi(m)} \equiv 1 \bmod m$
  COROLLARIO $\to$ $\bar{a}^{-1} = \overline{a^{\Phi(m)-1}}$
  $\Phi(n)$ = NUMERO DEI NATURALI MINORI DI N E PRIMI CON N
- TEOREMA **CINESE** DEL RESTO: ~~$b_1, \dots, b_r / (n_i, n_j) = 1\ (i \neq j)$~~
  $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Z}$ $\quad n_1, \dots, n_r / (n_i, n_j) = 1\ (i \neq j)$
  $\begin{cases} x \equiv b \bmod m \\ x \equiv b_r \bmod n_r \end{cases}$ AMMETTE SOLUZIONI, E SE x' È UNA SOLUZIONE OGNI ALTRA SOLUZIONE È DEL TIPO $x' + k_n \cdot n_1 \dots n_r$

$K[x]$ **POLINOMI** (LA RELAZIONE FRA POLINOMI È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA)

TEOREMA: $\forall\ f(x), g(x) \in K[x]$, $g(x) \neq 0\ \exists!\ q(x), r(x) \in K[x] / f(x) = g(x)q(x) + r(x)$
$gr\, r(x) < gr\, g(x)$

ALGORITMO EUCLIDEO: $f(x)\,s(x) + g(x)\cdot t(x) = d(x)$

TEOREMA DI RUFFINI: $f(x) \in K[x]$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha$ È RADICE DI $f(x) \Leftrightarrow (x-\alpha) \mid f(x)$
$f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r(x)$

COROLLARIO: $f(x) \in K[x]$ GRADO DI $f(x) = 2$ O GRADO DI $f(x) = 3 \Rightarrow f(x)$ È IRRIDUCI[BILE] $\Leftrightarrow \forall\ \alpha \in K \mid f(\alpha) \neq 0$ ($f(x)$ NON AMMETTE RADICI IN K)

INSIEME QUOZIENTE: $\frac{K[x]}{\langle m(x)\rangle}$ GRADO DI $m(x) = n \Rightarrow$ IN OGNI CLASSE DI $K[x]/\langle m(x)\rangle$ ESISTE UN UNICO POLINOMIO DI $K[x]$ DI GRADO MINORE DI N

$K[x]/\langle m(x)\rangle$ È UN CAMPO $\Leftrightarrow m(x)$ È IRRIDUCIBILE. SE $gr\, m(x) = n$ ALLORA $K[x]/\langle m(x)\rangle = \{[a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}]\}$

$\mathbb{Z}_p[x]/\langle m(x)\rangle$ È UN **CAMPO FONDAMENTALE DI GALOIS** $m(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ IRRIDUCIBILE $m(x) = n$ ED HA p^n ELEMENTI

$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle m(x)\rangle}$ CONTENENTE p^n ELEMENTI PRENDE IL NOME DI **CAMPO DI GALOIS** DI ORDINE p^n E SI DENOTA $GF(p^n)$ (NON CI SONO ALTRI CAMPI FINITI)

CARATTERISTICA (car K) SI DICE CHE IL CAMPO K HA CARATTERISTICA p SE p È IL PIÙ PICCOLO INTERO POSITIVO TALE CHE $p \cdot u = 0$ (u UNITÀ MOLTIPLICATIVA)

(!) K, CAMPO, car K = p ALLORA K CONTIENE IL SOTTOCAMPO $K' = \{u, 2u, \dots, pu\}$ ISOMORFO A $\mathbb{Z}_p$ (ISOMORFISMO È UNA FUNZIONE BIETTIVA)

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

GEOMETRIA E COMBINATORIA

QUARTA PARTE

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA: $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, AUTOVALORE DI f, SI DEFINISCE MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI $\bar{\lambda}$ E SI DENOTA $mg(\bar{\lambda})$ LA DIMENSIONE DI $V_{\bar{\lambda}}$
$mg(\bar{\lambda}) = \dim(V_{\bar{\lambda}})$

TEOREMA: f ENDOMORFISMO DI V, $\dim V = n$, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ AUTOVALORI DI f ALLORA:
f È DIAGONALIZZABILE $\iff$ 1) $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
2) $\forall \lambda_i : ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMDT: $\mathbb{R}^2$ PRODOTTO SCALARE CANONICO
$\langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' + yy'$ $B = \{v_1, v_2\}$ BASE DI $\mathbb{R}$

$B' = \left\{ \frac{w_1}{|w_1|}, \frac{w_2}{|w_2|} \right\}$ BASE ORTONORMALE $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$w_1 \perp w_2$ $(\langle w_1, w_2 \rangle = 0)$

DIAGONALIZZABILITÀ: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ENDOMORFISMO, A SIMMETRICA ALLORA f È DIAGONALIZZABILE $\bar{B}$ BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI, C, MATRICE DIAGONALIZZANTE $\Rightarrow C^{-1} = C^T$ (M. ORTOGONALE) (IL SUO det $= \pm 1$) $CC^{-1} = I$ $CC^T = I$ $(\det C)^2 = 1$ $\det C = \pm 1$

DIMOSTRAZIONI:

→ **PRODOTTO OPERATORIO**: DI APPLICAZIONI LINEARI, È UN APPLICAZIONE LINEARE, E L'INVERSA DI UN APPLICAZIONE LINEARE BIUNIVOCA È LINEARE

→ dimostrazione: SIANO f e g DUE APP. LINEARI, LA PRIMA DA V A V' E LA SECONDA DA V' A V'', DOVE V, V', V'' SONO TRE SPAZI VETTORIALI SU $\mathbb{R}$, RISULTA ALLORA $\forall v, w \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$(g \circ f)(v+w) = g(f(v)) = g(\alpha(f(v)) = \alpha g(f(v)) = \alpha(g \circ f)v$
$(g \circ f)(\alpha v) = g(f(\alpha v)) = g(\alpha(f(v)) = \alpha g(f(v)) = \alpha(g \circ f)v$
f^{-1} È UN APPLICAZIONE LINEARE BIUNIVOCA, INFATTI SE $x, y \in V'$ PER LA BIUNIVOCITÀ DI f ESISTONO UNICI $u, v \in V$ TALI CHE $u = f^{-1}(x)$ E $v = f^{-1}(y)$ PERTANTO SI HA CHE $x+y = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) =$
$= f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))$ E QUINDI $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$
$f^{-1}(\alpha x) = \alpha f^{-1}(x)$ E QUINDI f^{-1} È LINEARE

→ **ESISTENZA E UNICITÀ DI UN APP LINEARE**:
SIANO V E V' DUE SPAZI VETTORIALI SU $\mathbb{R}$, SIANO INOLTRE $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ UNA BASE DI V E $v_1', v_2', \dots v_n' \in V'$ ALLORA $\exists! f: V \rightarrow V'$ LINEARE TALE CHE $f(v_1) = v_1'$, $f(v_2) = v_2'$ ... $f(v_n) = v_n'$

dimostrazione: SIA f L'APPLICAZIONE LINEARE DI V IN V' DEFINITA PONENDO, $\forall v \in V$ $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, $f(v) = \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2' + \dots + \alpha_n v_n'$
f È LINEARE POICHE SE $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ ALLORA $f(v+w) =$
$f((\alpha_1+\beta_1)v_1 + (\alpha_2+\beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)v_n) = (\alpha_1+\beta_1)v_1' + (\alpha_2+\beta_2)v_2' + \dots +$
$+ (\alpha_n+\beta_n)v_n' = (\alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2' + \dots + \alpha_n v_n') + (\beta_1 v_1' + \beta_2 v_2' + \dots + \beta_n v_n') =$
$= f(v) + f(w)$ E $f(\gamma v) = f(\gamma\alpha_1 v_1 + \gamma\alpha_2 v_2 + \dots + \gamma\alpha_n v_n) =$
$= \gamma\alpha_1 v_1' + \gamma\alpha_2 v_2' + \dots + \gamma\alpha_n v_n' = \gamma(\alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2' + \dots + \alpha_n v_n') = \gamma f(v)$,
$\forall \gamma \in \mathbb{R}$ INOLTRE $f(v_i) = v_i'$ $\Rightarrow$ L'UNICITÀ SEGUE DALL'AVER IMPOSTO LE IMMAGINI DEI VETTORI DI UNA BASE

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011