Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria & Combinatoria

È proibita qualunque riproduzione di questo fascicolo, anche parziale, in libri,

pubblicazioni anche telematiche, cd, dvd, Siti Web e ogni altra forma di pubblicazione

senza il consenso scritto dell'autore.

In particolare, è proibita la vendita di questo fascicolo o di parti di esso in qualunque forma.

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria Combinatoria

I lezione
4/10/10

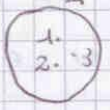
Insiemi

$\mathbb{N}$ numeri naturali interi positivi
$\mathbb{Z}$ numeri interi relativi interi positivi e negativi
$\mathbb{Q}$ numeri razionali a/b dove a, b appartengono a $\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$ numeri irrazionali / reali
$\mathbb{C}$ numeri complessi

$\in$ appartenente $\quad \notin$ non appartenente
$\exists$ esiste $\quad \exists!$ esiste unico
$|$ tale che (:) $\quad \Rightarrow$ implica
$\Leftrightarrow$ se e solo se

- gli insiemi vengono denominati con lettere maiuscole A
  x elemento di $A \quad x \in A \quad A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{x \mid x^2 + 2 = 0\}$

Diagrammi di Venn





$S \subseteq A$
S contenuto in A
(S sottoinsieme di A $\forall x \in S \Rightarrow x \in A$)

A insieme, insieme delle parti di A $P(A) = \{\text{Sottoinsiemi di } A\}$

$\emptyset$ insieme vuoto privo di elementi
a elemento di A
$\{a\}$ sottoinsieme di A

Es: $A = \{a, b, c\} \quad P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

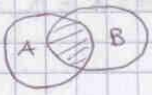
TEOREMA Se A ha n elementi allora $P(A)$ ha 2^n elementi

OPERAZIONI TRA INSIEMI:

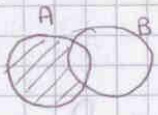
→ INTERSEZIONE di insiemi $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

→ UNIONE $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
è l'elemento x può anche appartenere ad entrambi gli insiemi





→ DIFFERENZA (\)
$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$



Caso particolare

X insieme, E, F sottoinsiemi di $X \Rightarrow$ Es $E \subseteq X, F \subseteq X$



$X \setminus E = \complement_X E$ complementare di E in X



In questa situazione valgono le leggi di DE MORGAN:

1) $\complement_X(E \cap F) = (\complement_X E) \cup (\complement_X F)$
2) $\complement_X(E \cup F) = (\complement_X E) \cap (\complement_X F)$

(!) A e B (insiemi) sono uguali se (sono uguali) vale la doppia inclusione
1) $A \subseteq B$
2) $B \subseteq A$

DIMOSTRAZIONE : I LEGGE DI DE MORGAN

→ si deve dimostrare che

1) $\complement_X(E \cap F) \subseteq (\complement_X E) \cup (\complement_X F)$

2) $(\complement_X E) \cup (\complement_X F) \subseteq \complement_X(E \cap F)$

dimostrare 1 $x \in \complement_X(E \cap F) \Rightarrow x \in X,\ x \notin E \cap F \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X,\ x \notin E \circ x \notin F \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \complement_X E \circ x \in \complement_X F$

$\Rightarrow x \in (\complement_X E) \cup (\complement_X F)$



dimostrare 2 $x \in (\complement_X E) \cup (\complement_X F) \Rightarrow x \in \complement_X E \circ x \in \complement_X F \Rightarrow x \in X,\ x \notin E \circ x \notin F \Rightarrow x \in X,\ x \notin E \cap F$

dimostrare 2° LEGGE DI DE MORGAN:

1) $\complement_X(E \cup F) \subseteq (\complement_X E) \cap (\complement_X F) \Rightarrow x \in X,\ x \notin E \cup F \Rightarrow$

$x \notin E \circ x \notin F \Rightarrow x \in X \circ x \notin E \circ x \in X \circ x \notin F \Rightarrow x \in (\complement_X E) \cap (\complement_X F)$

2) $(\complement_X E) \cap (\complement_X F) \subseteq \complement_X(E \cup F) \Rightarrow x \in \complement_X E \cap \complement_X F \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X \circ x \notin E \circ x \in X \circ x \notin F \Leftrightarrow x \in \complement_X(E \cup F)$ $x \notin E \cup F$

Proprietà di $\cup$ e $\cap$

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ commutativa

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (B \cap A) \cap C$ associativa

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ distributiva

4) Prodotto cartesiano di due insiemi ($\times$)

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ → coppie ordinate

$\neq$

$B \times A$ } due prodotti cartesiani sono diversi

Es: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{c,d\}$

$A \times B = \{(1,c), (1,d), (2,c), (2,d), (3,c), (3,d)\}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

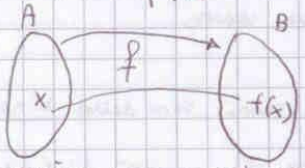
II lezione
5/10/10

Applicazioni fra insiemi

A, B insiemi

$f : A \to B$
$x \to f(x)$ → immagine di x tramite f

Es: $|P(A \times B)| = 2^6$ → n. elementi di



dominio codominio

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2 = f(x)$

applicazione parti colore più elementi di C in D



$f: A \to B$ si dice iniettiva se $\forall x, x' \in A, \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Elementi di logica

- Roma è la capitale d'Italia V
- la luna è un pianeta F
- Domani pioverà
- che ora è ?

III lezione
7/10/10

- Proposizione logica è un'espressione linguistica della quale si possa dire con certezza se è vera o falsa
- Connettivo logico : è un operazione che ci consente di connettere due o più espressioni ed ottenerne una nuova

P= insieme delle proposizioni

→ DEFINIZIONE: si definisce "congiunzione" l'operazione. (e)

$\wedge : P \times P \to P$
$(p, q) \longmapsto p \wedge q$

dove $p \wedge q$ è vera se sono vere sia p e q altrimenti è falsa

→ DEFINIZIONE: si definisce "disgiunzione" l'operazione (o)

$\vee : P \times P \to P$
$(p, q) \longmapsto p \vee q$

dove $p \vee q$ è vera se almeno una tra p e q è vera

Es: - Roma è la capitale di Italia o la luna è un satellite

→ DEFINIZIONE: si definisce "negazione" l'operazione

$\neg : P \to P$
$p \longmapsto \neg p$ (non p)

dove non $\neg p$ è vera p è falsa
$\neg p$ è falsa se p è vera

Es: Lucia o studia o guarda la televisione

→ DEFINIZIONE: si definisce "implicazione" (→ NATURALE) di due proposizioni p e q è l'operazione binaria

$\to : P \times P \to P$
$(p, q) \longmapsto (p \to q)$

dove $p \to q$ è falsa solo quando p è vera e q è falsa mentre in tutti gli altri casi è vera

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Esempio: Se ab .... allora

DEFINIZIONE: si definisce "complicazione materiale" l'operazione (se e solo se)

$\leftrightarrow : P \times P \to P$

$(p, q) \mapsto p \leftrightarrow q$

dove $p \leftrightarrow q$ se p e q sono entrambe vere o entrambe false mentre è FALSA p è VERA e q è falsa oppure p è falsa e q è vera

operazioni che agiscono su una coppia di proposizioni sono dette binarie

Date le proposizioni p e q, stabilire il valore di verità di $(p \wedge q) \vee p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

DEFINIZIONE: Siano A e B due proposizioni. A e B si dicono equivalenti se assumono gli stessi valori di verità in corrispondenza degli stessi valori attribuiti alle proposizioni che le compongono $(A = B)$

Es: $A = p \wedge q$ $\quad B = \neg[p \to (\neg q)]$

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F

OSSERVAZIONI: $p \to q$ e $q \to q$ non sono equivalenti che

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

- l'implicazione non è un operazione commutativa
- la coimplicazione è commutativa

→ considerata l'implicazione $p \to q$, la proposizione $\neg q \to \neg p$ si dice contro nominale

$p \to q = \neg q \to \neg p$

DEFINIZIONE: si definisce una tautologia una proposizione sempre vera qualunque sia il valore di verità attribuito alle sue componenti.

DEFINIZIONE: una "contraddizione" è la negazione di TAUTOLOGIA

Es: $p \vee \neg q$ (tautologia)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

$p \wedge \neg p$ è una contraddizione

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatorio

III lezione
7/10/10

ELEMENTI DI LOGICA

$p(x)$ proprietà di x sempre vera

logica dei predicati:

Si consideri un insieme $E \neq \emptyset$
per indicare $a \in E$ gode della proprietà p e scriviamo $p(a)$

per l'espressione $p(x)$ con x variabile in E non ha senso chiedersi se $p(x)$ è vera o falsa
$p(x)$ si dice un "PREDICATO" o "FORMA PROPOSIZIONALE" su E

→ Ie quantificatore universale:
$\forall x \in E : p(x)$ per ogni x in E, $p(x)$ è vera

Ie quantificatore universale esistenziale
$\exists x \in E : p(x)$ esiste almeno un elemento x in E tale che $p(x)$ è vera

Es: $p(a)$ $x^2 = 4$ $E = \mathbb{N}$

$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 = 4$ falsa

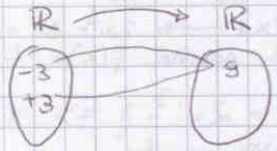
$\exists x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4$ vera

IV lezione
11/10/10

Funzione Iniettiva:
si dice iniettiva se $\forall x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Es: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ iniettiva
$x \mapsto f(x) = x+5$
$f(x) = f(y) \Rightarrow x+5 = y+5 \Rightarrow$
$x = y$

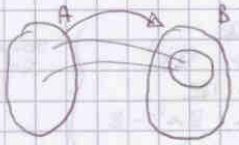


Funzione suriettiva $g: A \to B$ si dice suriettiva se $\forall y \in B$
$\exists x \in A \mid f(x) = y$

preso un sottoinsieme

IMMAGINE di $f = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$

$f(x)$ è suriettiva $\Leftrightarrow$ l'immagine di f è uguale a B



tutti gli elementi di B che provengono da A tramite

Funzione Biiettiva: $f: A \to B$ si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva, ovvero

$\forall y \in B \; \exists! x \in A \mid f(x) = y$ → se la vogliamo su
→ esiste ed è unico

CONTRO IMMAGINE: $f: A \to B$ $y \in B$ si definisce contro immagine di y e si denota $f^{-1}(y)$ l'insieme

$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

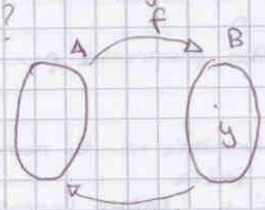
Es: funzione biettiva : $i_A : A \to A$ applicazione identica di A

$x \longmapsto i_A(x) = x$

Funzione Inversa : $f: A \to B$ (biettiva)
si definisce inversa di f la funzione $f^{-1} : B \to A$

$y \to f^{-1}(y) = x \;/\; f(x) = y$

* perché si ha bisogno di una funzione biettiva?



Es: quando mi accorgo che f^{-1} è la funzione inversa

$\neq$

~~qual è la~~

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

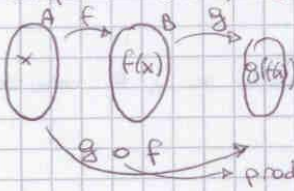
$x \longmapsto f(x) = x - 6$

qual è la controimmagine di 8

$f^{-1}(8) = \{x \in \mathbb{N} \;/\; f(x) = x - 6 = 8\}$

$= \{14\}$

Prodotto di due funzioni f^{-1}
comporre due funzioni



prodotto operatorio

$f: A \to B \quad g: B \to C$
si definisce prodotto operatorio di f e g e si denota g o f l'applicazione da $A \to C$

$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Qual è l'immagine tramite f^{-1} di

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = 2x - 1$

$f^{-1}(x) = x \mid f(x) = 6 \quad 2x - 1 = 6$

$x = \frac{13}{2}$

funzione inversa

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *
$x \longmapsto g(x) = 3x + 5$

$(f \circ g, \; g \circ f)$ → non vale la proprietà commutativa

$R: (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 3)$

$= 6x^2 - 4$

$f \circ g \quad f(3x+5) = (2(3x+5)^2 - 3)$

$2(9x^2 + 25 + 30x) - 3 \Rightarrow 18x^2 + 47 + 60x$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x^3 - 3 = f(x)$

iniettiva perché $f(x) = f(x') \Rightarrow$

$2x^3 - 3 = 2x'^3 - 3 \Rightarrow x = x'$

suriettiva perché:

$\forall y \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$

$2x^3 - 3 = y \quad x = \sqrt[3]{\frac{y+3}{2}} \in \mathbb{R}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \longmapsto x \mid f(x) = y$

$y \longmapsto \sqrt[3]{\frac{y+3}{2}}$

$y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+3}{2}}$

Com'è fatto ie prodotto tra due funzioni biettive?

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 4x^3$
2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2 - 8$
3) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

} sono sur, inie, bietti se biettive trovare f^{-1}

4) $f \circ g$, $g \circ f$
5) f', g' biettive $\Rightarrow g' \circ f'$ è biettiva? ~~non è detto~~ è vero
6) $g' \circ f'$ biettive $\Rightarrow f', g'$ biettive? ~~sicuramente~~ falso

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

V lezione
11/10/10

Esercizi:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x^3$

→ è suriettiva
~~→ è~~ è iniettiva
→ è biiettiva

$4y^3 = x \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

funzione suriettiva:
$f: A \to B$ se $\forall y \in B \ \exists x \in A / f(x) = y$

funzione iniettiva:
$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

ad ogni y corrisponde una ed una sola x

se ogni elemento di B ($f(x)$) è l'immagine di almeno un elemento di A

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - 8$

→ non è iniettiva
→ ~~non~~ è suriettiva
→ non è biiettiva

funzione biiettiva:
$f: A \to B$ se $\forall y \in B \ \exists! x \in A / f(x) = y$

3) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

funzione inversa: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto / f(x) = y$

sbagliato perché preso caso particolare

4) $g(f(x)) = 3(4x^3)^2 - 8 = 3(16x^6) - 8 = 48x^6 - 8$

$f(g(x)) = 4(3x^2 - 8)^3 =$

1 1
1 2 1
1 3 3 1

$4(27x^8 - 512 - 72x^4 - 32(3 \cdot 3))$

5) $f(x) = 4x^3$, $g(x) = x + 1$

$f(g(x)) = 4(x+1)^3 = 4(x^3 + 1 + 3x^2 + 3x)$
$\Rightarrow 4x^3 + 4 + 12x^2 + 12x$

$g(f(x)) \Rightarrow 4x^3 + 1$

1) $f(x) = f(x') = 4x^3 = 4x'^3 \Rightarrow x = x'$

$4x^3 = y \quad x^3 = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$

$f^{-1}: y \mapsto \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - 8 = g(x)$

$x, x' \in \mathbb{R} \mid g(x) = g(x') \Rightarrow 3x^2 - 8 = 3x'^2 - 8 \Rightarrow x^2 = x'^2$

$x = \pm x'$, non iniettiva / non suriettiva $3x^2 - 8 = y$

$x^2 = \frac{y+8}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y+8}{3}}$

4) $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}: (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x^3) = (4x^3)^2 - 8$

5) $f: A \to B$, $g: B \to C$
f, g biiettive $\Rightarrow g \circ f$ biiettiva?

⇓

a) $g \circ f$ iniettiva $(g \circ f : A \to C)$

$x, x_1 \in A \;/\; (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$

$\Rightarrow$ visto che la g è iniettiva $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

f è iniettiva

b) $g \circ f$ suriettiva

$\forall z \in C \quad \exists x \in A \;/\; (g \circ f)(x) = z$

?

$\forall z \in C \quad \exists y \in B \;/\; g(y) = z$ (g suriettiva)

$y \in B \quad \exists x \in A \;/\; f(x) = y$ (f suriettiva)

$\forall z \in C \; [\exists x \in A \;/\; g(f(x)) = z$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria

V lezione
12/10/10

RELAZIONI SU UN INSIEME : R Relazione su A

Proprietà delle Relazioni : $R \subseteq A \times A$

1) ρ relazione su A
riflessiva : $\forall a \in A : a \rho a$

Es : $x \rho x \iff x - x = 2 \cdot 0$

Es: $A = \{1,2,3,4,5\}$
$R = \{(1,1)(2,3)(3,2)$ non riflessiva perché manca la coppia $(4,4),(1,5)\}$
$(2,3) \in R$
$2R3$ (2 in relazione R con 3)
è un sottoinsieme del prodotto cartesiano

2) simmetrica.
$a \rho b \Rightarrow b \rho a$
Es: se c'è la coppia (1,2) nel sottoinsieme Relazione allora ci deve essere anche la coppia (2,1)

3) antisimmetrica :
$a \rho b, b \rho a \Rightarrow a = b$
Es: $x \rho y \iff x \leq y$
$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

Es: $R = \{$ rette del piano$\}$
relazione su R
parallelo per le relazioni
$r, r' \in R$
$r \rho r' \iff r \parallel r'$

4) transitiva:
$a \rho b, b \rho c \Rightarrow a \rho c$

Es: $\mathbb{Z}$
$x, y \in \mathbb{Z}$ ~~$x \rho y$~~
$x \rho y \iff x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}$
$(6,7) \in R$? No $6 \not\rho 7$

$x \rho y, y \rho z \Rightarrow x - y = 2k$
$y - z = 2h \Rightarrow x - z =$
$x - y + y - z = 2k + 2h = 2(k+h)$
$\Rightarrow x \rho z$

ELEMENTI DI LOGICA:

Implicazione materiale:
$\to : P \times P \to P$ | le seguenti condizioni siano soddisfatte
1) $p \to q$ è falsa quando p è vera e q è falsa
2) $(p \to q) \wedge (q \to p) = p \leftrightarrow q$
3) $p \to q \neq p \leftrightarrow q$

predicato : $E \neq 0$, p una proprietà su E
$p(x) =$ " x gode della proprietà p " è un predicato
come si trasforma un predicato in una proposizione
$E = \mathbb{N}$, $p(x)$: $x^2 - 4 = 0$
1) $a \in E$, $p(a)$
2) quantificatore universale $\forall x \in E : p(x)$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

RELAZIONE D'ORDINE: A insieme, ρ relazione su A, ρ si dice relazione d'ordine se:
1) proprietà riflessiva
2) proprietà antisimmetrica $a \rho b, b \rho a \Rightarrow a = b$
3) proprietà transitiva

Ci porteranno a parlare di Reticoli, Reticoli booleani, Algebre di boole

RELAZIONI DI EQUIVALENZA:

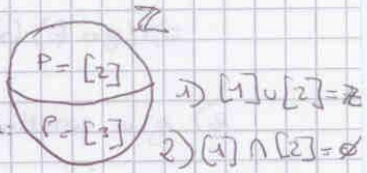
- Si definisce classe di equivalenza dell'elemento $a \in A$ l'insieme $[a] = \{b \in A / a \rho b\}$ → sono tutti quegli elementi che sono in relazione tra di loro
  ↙ rappresentante della classe, si denota anche $\bar{a}$

Es: R, // relazione di equivalenza
$[x] = \{x' / x' // x\}$

Es: $\mathbb{Z}$, $x \rho y \iff x - y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ relazione di equivalenza.

(!) osservazione: $z, w \in \mathbb{Z}$, z, w pari $\Rightarrow z \rho w$
z, w sono dispari $\Rightarrow z \rho w$
z pari, w dispari $\Rightarrow z \not\rho w$

$P = [2] = \{\text{interi pari}\}$
$D = [3] = \{\text{interi dispari}\}$



1) $[1] \cup [2] = \mathbb{Z}$
2) $[1] \cap [2] = \emptyset$

Caso generale per tutte le relazioni di equivalenza:

TEOREMA: A insieme, ρ relazione di equivalenza
(proposizione) lemma. $\Rightarrow$ a)
$\Rightarrow$ i) $\forall a \in A / a \in [a]$
2) $a \rho b \iff [a] = [b]$
3) $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[a] = [b]$

ie: col corollario è un risultato perché è una conseguenza di un teorema

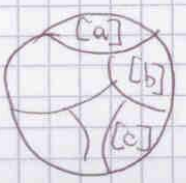
Dimostrazioni
1) ρ rel. di equi $\Rightarrow a \rho a \Rightarrow a \in [a]$
3) a) $\Leftarrow$ $[a] = [b]$ è l'ipotesi

$b \in [b] = [a] \Rightarrow a \rho b$ (ipotesi)

i) $[a] \subseteq [b]$
ii) $[b] \subseteq [a]$

Dimostrazione $a \rho b$ ipotesi e d applico la proprietà transitiva
i) $z \in [a] \Rightarrow z \rho a \Rightarrow z \rho b \Rightarrow z \in [b]$
ii) stessa dimostrazione

3) $z \in [a] \cap [b] \Rightarrow z \in [a] e z \in [b] \Rightarrow a \rho z, z \rho b \Rightarrow$
$\Rightarrow a \rho b \Rightarrow [a] = [b]$



$\bigcup_{x \in A} [a_x] = A$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — VI lezione 13/10/10

Sistemi di numerazioni

$a+b = 10100$ $\quad a = 11000$, $b = 100$

$10110 : 1010 = 100,1$ (resto 0)

$100,1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^{-1}$

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Geometria:

Es: $f: A \to B$, $g: B \to C$

$g \circ f: A \to C$ biettiva $\Rightarrow$ f iniettiva, g suriettiva

1) f è iniettiva poiché
$x, x_1 \in A \mid f(x) = f(x_1) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x_1))$ perché g è un applicazione

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x_1$ ($g \circ f$ biettiva)

2) g è suriettiva poiché
$g \circ f$ è biettiva $\Rightarrow \forall z \in C \ \exists x \in A \mid g(f(x)) = z \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall z \in C \ \exists y = f(x) \in B \mid g(y) = z \Rightarrow$ g è suriettiva

$g \circ f$ biettiva, f non suriettiva, g non iniettiva

Es: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x = f(x)$ $\qquad g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto |x| = g(x)$

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x$ $\Rightarrow$ identità di $\mathbb{N}$ ed è biettiva, f non è suriettiva, g non è iniettiva (perché $2 \neq -2$)

Relazioni particolari

- RELAZIONI DI EQUIVALENZA: A insieme, ρ relazione su A
ρ si dice relazione di equivalenza se:
1) proprietà riflessiva: $a \rho a \quad \forall a \in A$
2) proprietà simmetrica: $a \rho b \Rightarrow b \rho a$
3) proprietà transitiva: $a \rho b, b \rho c \Rightarrow a \rho c$

↳ arriveremo a parlare ai campi finiti (campi di Galois)

Esempio : $m=3$ $17, 23 \in \mathbb{Z}$ vedere se i due interi sono in relazione tra loro

$23-17=6=2\cdot 3 \Rightarrow 23 \equiv 17 \bmod 3$

$23 = 3\cdot 7 + 2$ $\quad 17 = 3\cdot 5 + 2 \Rightarrow 23 \equiv 17 \bmod 3$

Dimostrazione $\Leftarrow$ $\quad x = mq_1 + r \quad y = mq_2 + r \Rightarrow$

$x - y = m(q_1 - q_2) \Rightarrow x \equiv y \bmod m$

Stabilire le classi di Equivalenza: (della congruenza modulo m)

($m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$) Osservazione: $\forall z \in \mathbb{Z} : z = mq + r, \quad 0 \leq r < m$

$\Rightarrow z - r = mq \Rightarrow z \equiv r \bmod m \Rightarrow z \in [r]$ ← classe di equivalenza di r

Osservazione: $[s], [t], \quad 0 \leq s, t \leq m-1$, $s \geq t$

$[s] = [t]$

$s \in [s] = [t] \Rightarrow s - t = km \Rightarrow s = t, \; k = 0$

(!) le classi di equivalenza sono esattamente m

$$\mathbb{Z}/\equiv_m = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\} = \mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1} \ldots \overline{m-1}\}$$

Esempio: $\equiv_m$, $m = 7$ $\quad \overline{521}$?

$521 = 74 \cdot 7 + 3$

$521 - 3 = 74 \cdot 7$

$521 \equiv 3 \bmod 7$

$\overline{521} = \bar{3}$

521	7
49	74
31	
28	
3	

$\mathbb{Z}_m$ Proprietà: (della congruenza modulo m)

1) se $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \bmod m$

2) se $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m \Rightarrow ac \equiv bd \bmod m$

3) se $a \equiv b \bmod m \Rightarrow ad \equiv bd \bmod m$

4) se $ta \equiv_{mt} tb$ $m \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \bmod m$

Osservazione: se $ad \equiv bd \bmod m \Rightarrow a \equiv b \bmod m$?

$4 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 5 \bmod 10 \Rightarrow 4 \equiv 2 \bmod 10$ NO

? $\Rightarrow 4 \equiv 2 \bmod 2$ Sì

Dimostrazione 1): $a \equiv b$, $c \equiv d \Rightarrow a - b = km$, $c - d = hm \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b + km$, $c = d + hm \Rightarrow a + c = b + d + (h+k)m$

$\Rightarrow (a+c) - (b+d) = (k+h)m$

$\Rightarrow (a+c) \equiv (b+d)$

Geometria e Combinatoria

VI lezione
14/10/10

α) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$

β) $[x] \cap [y] = \emptyset$

} le classi di equivalenza costituiscono una partizione

DEFINIZIONE: A insieme, ρ relazione di equivalenza su A si definisce insieme quoziente di A rispetto a ρ e si denota A/ρ l'insieme $A/\rho = \{[a] \mid a \in A\}$

Es. $\mathbb{Z}$, $x \rho y \iff x - y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/\rho = \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$

VII lezione
18/10/10

CONGRUENZA modulo m $\{\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, m intero / $m \geq 2$

$x \equiv y \bmod m \iff x - y = km$, $k \in \mathbb{Z}$ — x congruo a y modulo m

$\equiv_m$ è una relazione di equivalenza

1) proprietà riflessiva: $x \equiv x \bmod m \ \forall x \in \mathbb{Z}$ $\quad x - x = 0 \cdot m$

2) " simmetrica: $x \equiv y \bmod m \Rightarrow y \equiv x$

$x \equiv y \bmod m \Rightarrow x - y = km$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x = (-k)m \Rightarrow y \equiv x \bmod m$

3) proprietà transitiva: $x \equiv y$, $y \equiv z \bmod m \Rightarrow x \equiv z \bmod m$

$x \equiv y$, $y \equiv z \Rightarrow x - y = km$, $y - z = hm \Rightarrow$

$x - z = x - y + y - z = km + hm = (k+h)m \Rightarrow x \equiv z$

$-k(m) \Rightarrow y \equiv x \bmod m$

OSSERVAZIONE: $x \equiv y \bmod m \iff$ x e y divisibili per m danno lo stesso resto

TEOREMA EUCLIDEO:
$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ $\exists! \ q, r \in \mathbb{Z} / \ a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$
(divisione euclidea)
q = quoziente r resto

$x = q_1 m + r_1$ $\quad y = q_2 m + r_2$ $\quad x - y = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)$

per l'unicità del resto e del quoziente $= 0$

Dimostrazione $\Rightarrow$ $x \equiv y \bmod m \Rightarrow x - y = k \cdot m$, $k \in \mathbb{Z}$

$x - y = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2) \Rightarrow r_1 = r_2$

$a \equiv b \bmod m$ $\quad \boxed{a - b = km}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Esempio: $\mathbb{Z}_7 \neq \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ $\bar{4}+\bar{6}=\bar{10}$

$10 = 7 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 10 - 3 = 7 \cdot 1$

$10 \equiv 3 \bmod \Rightarrow \bar{10} = \bar{3}$

Il campo è un anello commutativo unitario che possiede anche l'inverso

Esercizio: $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

·	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{4}$

In $\mathbb{Z}_5$ ogni elemento non nullo ammette un inverso

·	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ divisori dello zero

per tutti gli elementi invertibili solo $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$ $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$

Es: $\mathbb{Z}_9$

$\bar{3}^{-1}$? $\nexists$

$\bar{x}$ è inverso di $\bar{3}$ se $\bar{3} \cdot \bar{x} = \bar{1}$

Quando i numeri sono primi possiedono tutti gli elementi invertibili

DEFINIZIONE: $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ è invertibile se $\exists \bar{x} \in \mathbb{Z}_m / \bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{1}$

OSSERVAZIONE: $\bar{a}\bar{x} = \bar{1} \Rightarrow ax \equiv 1 \bmod m$ → per determinare l'inverso

congruenza lineare ammette soluzioni

DEFINIZIONE: massimo comun divisore fra a e b

$d = (a, b)$

1) $d|a$ $(a = a' \cdot d)$, $d|b$ $(b = b' \cdot d)$

2) $c|a$, $c|b \Rightarrow c|d$

ALGORITMO EUCLIDEO:

$d = (a, b)$ $\quad a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$

$b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$ $\quad 0 \leq r_3 < r_2$

$r_2 = r_3 q_4 + 0$ $\Rightarrow$ il massimo comun divisore è l'ultimo resto non nullo

IDENTITÀ DI BEZOUT: $d = (a, b)$ $\exists s, t \in \mathbb{Z} / d = as + bt$ identità di bezout

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — VII lezione 28/10/10

Dimostrazione 2)

$a \equiv b,\ c \equiv d \Rightarrow a-b = km,\ c-d = hm \Rightarrow a = b+km,$

$c = d+hm \Rightarrow ac = (b+km)\cdot(d+hm) = bd + dkm +$

$+ bhm + hkm^2 \Rightarrow ac = bd + m(dk + bh + hkm)$

$\Rightarrow ac - bd = m(dk + bh + hkm)$

Dimostrazione 3)

$a \equiv b \bmod m \Rightarrow (a-b)s = mk \quad k' = ks$

$as - bs \equiv 0 \bmod m \quad as - bs = mk'$

$as \equiv bs \bmod m$

Dimostrazione 4) $ta \equiv_m tb \qquad a \equiv b \qquad (a-b)t = (km)t$

$at - bt = kmt \Rightarrow ta \equiv tb$

$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ classi resto mod m

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ sono ben definite le operazioni di somma e prodotto (non dipendono dalla scelta dei rappresentanti nelle classi)

$+ : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$

$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ $\quad x' \in \bar{x},\ y' \in \bar{y}$

$\cdot : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ $\quad \Rightarrow \bar{x'} = \bar{x},\ \bar{y'} = \bar{y}$

$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$

$(\bar{x'}, \bar{y'}) \mapsto \bar{x'} + \bar{y'} = \overline{x'+y'}$

PROPRIETÀ

Somma: 1) commutativa: $\bar{x}+\bar{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \bar{y}+\bar{x}$

2) associativa;
3) $\exists\, \bar{0} \in \mathbb{Z}_m$, elemento neutro rispetto alla somma
4) $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{Z}_m\ \exists\, -\bar{x} = \overline{-x} \in \mathbb{Z}_m$

$(\mathbb{Z}_m, +)$ gruppo abeliano se rispetta le 4 proprietà

Prodotto 5) associativa

6) proprietà distributiva
$\bar{x}\cdot(\bar{y}+\bar{z}) = \bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot\bar{z}$

7) $\exists\, \bar{1} \in \mathbb{Z}_m$ unità moltiplicativa $\bar{x}\cdot\bar{1} = \overline{x\cdot 1} = \bar{x}$
8) commutativo

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ anello commutativo unitario solo quando un insieme rispetta $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tutte queste proprietà

Osservazione: $ax \equiv b \bmod m$ x' sol. $\in \mathbb{Z}$

$\forall z \mid z \equiv x' \bmod m \quad (z \in [x']_m)$

$z - x' = km \Rightarrow z = x' + km$ (z è soluzione se e solo se)

$a \cdot (x' + km) - b = tm \quad az - b = t \cdot m$

$ax' + akm - b = tm$

$akm \; ax' - b = m(t - ak)$

ogni elemento della classe x' è soluzione

$[x']_m = \{x' + hm \mid h \in \mathbb{Z}\}$

Proposizione:

$ax \equiv b \bmod m$ x' una sua soluzione (Tesi 1) $\Rightarrow$ ogni altra soluzione è del tipo $x' + k \cdot \frac{m}{(a,m)}$ numero intero

Tesi (2) Se $d = (a, m)$ esattamente d soluzioni non congrue fra loro modulo m:

$x' \quad x' + \frac{m}{d} \quad \dots, \quad x' + (d-1) \cdot \frac{m}{d}$

$k = 0 \quad k = 1 \quad k = d - 1$

Es: Sia $A = \{1, 2, 3\}$ quante sono le applicazioni $f: A \to A$?
Quante e quali sono le applicazioni $A \to A$ iniettive e suriettive

Lezione IX
22/10/10

- 3^3 applicazioni 3 · 3 possibilità
quali di queste sono biettive?
- biettive $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilità

$\begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to A \to f(A)$

identità $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Definizione: Sia A un insieme con n elementi. Un'applicazione $f: A \to A$ che sia biettiva si dice una permutazione. L'insieme di tutte le permutazioni di A si denota con $S(A)$

Geometria e combinatoria — VIII lezione 21/10/10

Esercizi:

MCD (54, 45) $d = (54, 45)$

$54 = 45 \cdot 1 + 9$

$45 = 9 \cdot 5$

Identità di Bezout $= 9 = 54 \cdot 1 + 45(-1)$
$a \; s \quad b \; t$

Es: $d(420, 182) = 14$ MCD

$420 = 182 \cdot 2 + 56$

$182 = 56 \cdot 3 + 14$

$56 = 14 \cdot 4$

$14 = 182 + 56 \cdot (-3)$

$= 182 + (420 + 182(-2)) \cdot (-3) =$

$= 182 + 420(-3) + 182(7)$

$a \; s \quad b \; t$

Proposizione: la congruenza lineare $ax = b \bmod n$ ammette soluzioni se e solo se $\Leftrightarrow d = (a, n) \mid b$

Dimostrazione

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ soluzione di $ax = b \bmod n \Rightarrow a\bar{x} - b = kn$

$\Rightarrow a\bar{x} + n(-k) = b \Rightarrow a'd\bar{x} + n'd(-k) = b \Rightarrow d(a'\bar{x} - kn') = b$

$a' \quad n'$

$\Rightarrow d \mid b$

Dim $\Leftarrow$ $d = as + nt \quad s, t \in \mathbb{Z}$

$b = hd = h(as + nt)$

$b = ash + nth \Rightarrow ash - b = n(-th)$

x

$\Rightarrow a\tilde{x} \equiv b \bmod n$

Es: $12x \equiv 33 \bmod 57$

$d(57, 12) = 3 \quad d \Rightarrow \quad 57 = 12 \cdot 4 + 9 \Rightarrow 12 = 9 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 9 = 3 \cdot 3$

$3 \mid 33 \Rightarrow$ la congruenza ammette soluzioni

$3 = 12 + 9(-1) = 12 + (57 + 12 \cdot (-4))(-1)$

$= 12(5) + 57(-1)$

$a \; s \quad n \; t$

$33 = 3 \cdot 11 = (57 \cdot (-1) + 12(-5)) 11 = 57 \cdot (-11) + 12 \cdot 55$

$\Rightarrow 12 \cdot 55 - 33 = 57 \cdot 11 \Rightarrow 12 \cdot 55 \equiv 33 \bmod 57$

$x = 55$

$12(-14) \equiv 21 \bmod 27$

Es: $12x \equiv 21 \bmod 27 \quad d = (27, 12) = 3 \quad 27 = 12 \cdot 2 + 3$

$12 = 3 \cdot 4$

$3 \mid 21$ ammette soluzioni $\quad 3 = 27 + 12(-2) \quad 21 = 3 \cdot 7$

$21 = 7[27 + 12(-2)] = 27 \cdot 7 + 12(-14) \quad 12(-14) - 21 = 27(7)$

Dim $\Leftarrow$ $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, sicuramente a non è un multiplo di p

$\Rightarrow (a,p) = 1 \Rightarrow \exists\, \bar{a}^{-1} \in \mathbb{Z}_p$

Nel caso di p, primo c'è anche un altro metodo per trovare l'inverso in $\mathbb{Z}_m$

PICCOLO TEOREMA DI FERMAT: $\mathbb{Z}_p$, p primo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$

$\bar{a} \neq \bar{0}$ $\bar{a}^{-1}$?

p primo, $(a,p) = 1$ allora $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

Dimostrazione: $\mathbb{Z}_p^*$ $\bar{a} \neq \bar{0}$ $\mathbb{Z}_p^* - \{\bar{0}\} = \mathbb{Z}_p^*$

moltiplico tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_p^*$ per $\bar{a}$ $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1} \dots \overline{p-1}\}$

$\bar{a}, \overline{2a}, \dots, \overline{(p-1)a}$ $\overline{sa} = \overline{ta}$, $1 \leq s, t \leq p-1$

$(s-t)a \equiv 0 \bmod p$ $(s-t)a = h \cdot p$

$\Rightarrow (a,p) = 1 \Rightarrow p \mid (s-t) \Rightarrow s = t \Rightarrow$

quindi tutte le classi di $\mathbb{Z}_p^*$ sono diverse tra di loro

$\bar{1}, \bar{2} \dots \overline{p-1} \Rightarrow \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots \cdot \overline{p-1}$

$\bar{a}, \overline{2a} \dots, \overline{(p-1)a} \Rightarrow \bar{a} \cdot \overline{2a} \cdot \dots \cdot \overline{(p-1)a}$

$\overline{(p-1)!} = \overline{(p-1)!} \cdot \overline{a^{p-1}}$

Corollario: (conseguenza di un teorema)

$\mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ allora $\bar{a}^{-1} = \overline{a^{p-2}}$

Dimostrazione: $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow (a,p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

$\Rightarrow \overline{a^{p-1}} = \bar{1} \Rightarrow \overline{a \cdot a^{p-2}} = \bar{1} \Rightarrow \bar{a} \cdot \overline{a^{p-2}} = \bar{1}$

$\Rightarrow \bar{a}^{-1} = \overline{a^{p-2}}$

Es: $\mathbb{Z}_7$ 7 è primo possiamo usare Fermat

$\bar{2}^{-1} = \overline{2^5} = \overline{32} = \bar{4}$

Def: Funzione di Eulero ϕ

$\Phi(n)$ = è il numero dei naturali minori di n e primi con n

Es: $\Phi(8) = 4$ $\{1, 3, 5, 7\}$ = insieme dei naturali < 8 e primi con 8

ordine $|\{1,3,5,7\}| 4$

Geometria e combinatoria — IX lezione

Esercizio: $S(A)$ ha $n!$ elementi

- Due permutazioni di A si possono moltiplicare tramite il prodotto operatorio

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&5&4&3&2&1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&3&4&6&5&1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 5&4&3&1&2&6 \end{pmatrix} \qquad \sigma \circ \tau' = \sigma(\epsilon(A))$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 1&5&6&4&3&2 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto operatorio non è commutativo.
- Il prodotto è associativo

$$\sigma \circ (\tau \circ \omega) = (\sigma \circ \tau) \circ \omega$$

- Tutte applicazioni si possono invertire

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&1&2&3&5&4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&5&4&3&2&1 \end{pmatrix}$$

$\sigma = \sigma^{-1}$ involuzione

OSSERVAZIONE: S_n è un insieme dotato di un operazione $\circ$ prodotto tale che

1. prodotto associativo
2. $\exists\, id_n \mid \sigma \circ id_n = id_n \circ \sigma = \sigma \quad \forall \sigma \in S_n$ (esiste un elemento neutro)
3. $\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n \mid \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$

un insieme con operazione tale che valgano le proprietà 1,2,3 si dice GRUPPO → S_n con l'operazione prodotto è un gruppo e si chiama GRUPPO SIMMETRICO

Esercizi

1. $n = 7$ $\quad f = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 3&2&5&4&1&7&6 \end{pmatrix}$ $\quad g = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 7&1&2&3&4&6&5 \end{pmatrix}$

$f^{-1} \circ g = ?$ $\quad (g^{-1} \circ f^{-1})$

2. quante sono le permutazioni di 6 elementi tali che $\sigma(5) = 6$

TEOREMA CINESE DEL RESTO:

$b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Z}$

$n_1, \dots, n_r / (n_i, n_j) = 1 \quad (i \neq j)$

allora il sistema $\begin{cases} x \equiv b_1 \bmod n_1 \\ \dots \\ x \equiv b_r \bmod n_r \end{cases}$

ammette soluzioni, e se x' è una soluzione, ogni altra soluzione è del tipo $x' + km \quad k n_1 \cdot n_2 \dots n_r, \ k \in \mathbb{Z}$

Es: $\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 9 \\ x \equiv 3 \bmod 7 \end{cases}$

$(9,7) = 1 \Rightarrow \exists$ sol

$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (9-7) \cdot 3$
$= 9(-3) + 7(4)$

$9 \cdot (-3) - 1 = 7(-4)$

$y = -3$ sol $\Rightarrow x = 2 + 9y \Rightarrow x = -25$

$x \equiv 2 \bmod 9$
$x - 2 = 9y, \ y \in \mathbb{Z}$
$x = 2 + 9y$
$2 + 9y \equiv 3 \bmod 7$
$9y \equiv 1 \bmod 7$

$\Leftarrow \quad 9 = 7 \cdot 1 + 2$
$7 = 2 \cdot 3 + 1$
$2 = 1 \cdot 2$

tutte le soluzioni: $-25 + K \cdot 63, \ K \in \mathbb{Z}$

Es 8) $U_{22} = \{$ elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{22} \}$

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_{22}$ è invertibile $\Leftrightarrow (a, 22) = 1$

$\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{13}, \bar{15}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{21}\} = U_{22}$

9) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

g^{-1}: $1 \mapsto 4, \ 2 \mapsto 3, \ 3 \mapsto 5, \ 4 \mapsto 2, \ 5 \mapsto 1$

$g^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$f \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$(f \circ g^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Es $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f((a,b)) = (-2b, 2a+b)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g((a,b)) = (3b, 2a-b)$

$(g \circ f)((a,b)) = g[f((a,b))] = g((-2b, 2a+b)) =$
$= (3(2a+b), 2(-2b) - (2a+b)) = (6a+3b, -5b-2a)$

Geometria e Combinatoria: X Lezione 25/10/10

INVERSI IN $\mathbb{Z}_m$

Proposizione: $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, $\bar{a} \neq \bar{0}$

allora $\bar{a}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_m \iff (a, m) = 1$

Dimostrazione $\Rightarrow$ $\bar{a}$ invertibile $\Rightarrow \exists\, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m / \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$

$\Rightarrow ab \equiv 1 \bmod m \Rightarrow ab - 1 = tm,\ t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow as + m(-t) = 1 \Rightarrow (a, m) = 1$

$\Leftarrow$ $(a, m) = 1 \Rightarrow \exists\, c, d \in \mathbb{Z} / ac + md = 1$

$\Rightarrow \overline{ac} = \bar{1} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{1} \Rightarrow \bar{a}$ invertibile

(1) Per trovare l'inverso si risolve una congruenza

Es: $\mathbb{Z}_{25}$, $\overline{17}^{-1}$?

$(25, 17) = 1$ $\quad \overline{17} \cdot \bar{x} = \bar{1}$ $\quad 17x \equiv 1 \bmod 25$

$25 = 17 \cdot 1 + 8$ $\quad 8 = 25 + 17 \cdot (-1)$

$17 = 8 \cdot 2 + 1$ $\Rightarrow 1 = 17 + 8 \cdot (-2)$ $\Rightarrow 1 = 17 + [25 + 17 \cdot (-1)] \cdot (-2)$

$8 = 1 \cdot 8$

➢ Trovare l'identità di Bezout

$1 = 17(3) + 25(-2)$

$17x - 1 = 25 \cdot k$ $\quad 17 \cdot 3 - 1 = 25 \cdot 2$

$\overline{17} \cdot \bar{3} = \bar{1} + \overline{25} \cdot \bar{2} \rightleftharpoons 0$

$\overline{17} \cdot \bar{3} = \bar{1} \Rightarrow 17^{-1} = \bar{3}$

TEOREMA: (Def.)

$(A, +, \cdot)$ anello commutativo unitario con unità moltiplicativa 1

A si dice campo se $\forall\, a \in A$, con $a \neq 0$ $\exists\, b \in A$ | $ab = 1$ ($b = a^{-1}$ inverso di a)

TEOREMA: $\mathbb{Z}_p$ è un campo $\iff$ p è primo

Dimostrazione: $\Rightarrow$ Per assurdo p non primo $p = rs$, con r, s, $1 < r$, $s < p$

$\bar{0} = \bar{p} = \bar{r} \cdot \bar{s}$ $\quad \bar{r} \neq \bar{0} \Rightarrow \exists\, \bar{r}^{-1}$

$\Rightarrow \bar{0} = r^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{r}^{-1} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} = \bar{1} \cdot \bar{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{0} = \bar{s}$ assurdo

Es: $f(x) = x^2+x+1 \in \mathbb{R}[x]$ non è riducibile

$f(x) = x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ è riducibile

$x^2 - \bar{2}x + \bar{1} = (x-\bar{1})^2$

Osservazione: un polinomio di I grado è sempre irriducibile.

Def: $\alpha \in K$ si dice radice o zero del polinomio $f(x)$ $f(x) \in K[x]$ se $f(\alpha) = 0$

→ α si dice radice di molteplicità n se $(x-\alpha)^n \mid f(x)$ ma $(x-\alpha)^{n+1} \nmid f(x)$

Osservazione: $f(x) = (x-\alpha)^n \cdot g(x)$ $f(\alpha) = 0$

Es: $f(x) = x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$

$\bar{1} \in \mathbb{Z}$ è radice di $f(x)$ perché

$f(\bar{1}) = \bar{1}^2 + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$

$\Rightarrow$ classe $\bar{1}$ è radice di molteplicità 2

$(x-\bar{1})^2 \mid f(x)$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatorio — X Lezione 25/10/10

Proprietà della funzione di Eulero: Φ

1) p primo $\mid \Phi(p) = p-1$
2) p^n, primo $\mid \Phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$
3) $(a,b) = 1 \mid \Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$

Esercizi: (Esercitazione)

1) $8x \equiv 26 \mod 42$ determinare tutte le soluzioni non congrue fra loro
2) $x^2 - \bar{4}x + \bar{2} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_{17}$
3) Determinare con l'algoritmo euclideo $\bar{9}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{20}$
4) $\bar{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_7$ (Fermat)
5) $\overline{5^{-1}}$ in $\mathbb{Z}_6$ (Eulero)
6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $f((a,b)) = (-2b, 2a+b)$
   f è biettiva? f^{-1}?
7) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $g((a,b)) = (3b, 2a-b)$ $g \circ f$
8) Determinare $U_{22} = \{$ elem. invertibili di $\mathbb{Z}_{22}\}$
9) $f = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&1&5&4&2 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&4&2&1&3 \end{pmatrix}$
   $(f \circ g^{-1})^{-1}$
10) $f: A \to B$ $S, t \subseteq A$ $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$?

Teorema di Eulero:

$(a, m) = 1$ (a è primo con m) allora $a^{\varphi(m)} = 1 \mod m$

Corollario: $\mathbb{Z}_m$, $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, $\bar{a} \neq \bar{0}$
allora $\bar{a}^{-1} = \overline{a^{\Phi(m)-1}}$

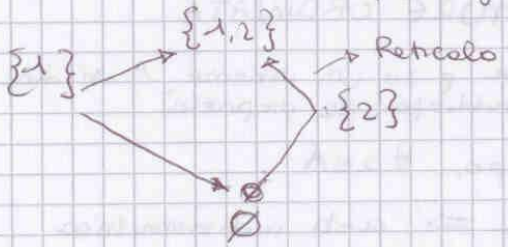
Dimostrazione:

$a^{\Phi(m)} \equiv 1 \mod m \Rightarrow \overline{a^{\Phi(m)}} = \bar{1} \Rightarrow \bar{a}\,\overline{a^{\Phi(m)-1}} = \bar{1}$
$\Rightarrow \bar{a} \cdot \overline{a^{\Phi(m)-1}} = \bar{1} \Rightarrow \bar{a}^{-1} = \overline{a^{\Phi(m)-1}}$

Esempio: (opp) $\mathbb{Z}_8$, $\bar{3}^{-1}$

$\Phi(8) = 4$
$\bar{3}^{-1} = 3^{\Phi(8)-1} = \bar{3}^3 = \overline{27} = \bar{3}$

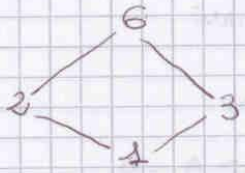
diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(\{1,2\}, \subseteq))$



Reticolo

diagramma di Hasse

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ è il poset $(A, |)$ p è la divisibilità



se $A = \{1, 2, 5, 6\}$



Diagramma di Hasse

$(\mathcal{P}\{a, b, c\}, \subseteq)$ → ordinato rispetto l'inclusione

$\emptyset$ ~~$\{\emptyset\}$~~ $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}$

$\{a, c\}$ ~~$\{\emptyset\}$~~, $\{a, b, c\}$

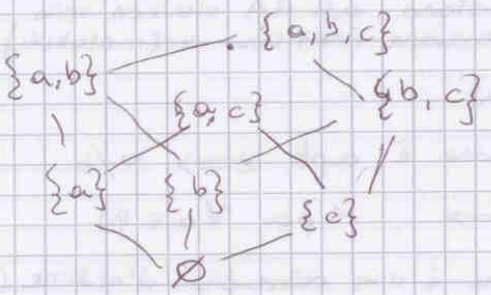
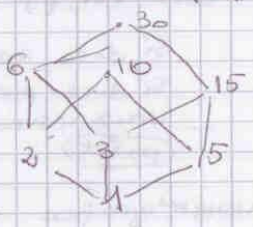


diagramma di Hasse $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

ordinato rispetto a $|$

le relazioni vanno dal basso verso l'alto





Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — XII lezione 28/10/10

COSTRUZIONE DEI CAMPI DI GALOIS:

Def: (CAMPO)

K campo, è un anello commutativo unitario / $\forall a \in K$, $a \neq 0$, $\exists\, a^{-1} \in K$

Es: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p primo

polinomio nell'indeterminata x a coeff nel campo K

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

n = grado di $f(x)$ $\quad (a_n \neq 0)$

a_n = coefficiente direttivo

polinomio monico se il coefficiente direttivo è 1

$K[x] = \{$ polinomi di qualsiasi grado nell'indet. x a coeff. in $K\}$

$(K[x], +, \cdot)$ $\quad g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$$

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 \cdot b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + b_0 a_2)x^2$$

$(K[x], +, \cdot)$ anello commutativo unitario con 1 unità moltiplicative

$K[x]$ $\quad f(x) \mid g(x)$

Teorema: $\forall f(x), g(x) \in K[x]$, $g(x) \neq 0$ ~~$\exists!\ q(x), r(x)$~~

$\exists!\ q(x), r(x) \in K[x]$ / $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $gr\, r(x) < gr\, g(x)$ $\quad (f(x), g(x)) = d(x)$

Algoritmo euclideo

$$f(x)s(x) + g(x)\cdot t(x) = d(x)$$

Definizione: $f(x) \in K[x]$ si dice riducibile se ~~$\exists\, s(x), t(x) \in K$~~

$\exists\, s(x), t(x) \in K[x]$ / $f(x) = s(x) \cdot t(x)$

$1 \leq gr\ s(x) < gr\, f(x)$

$1 \leq gr\ t(x) < gr\, f(x)$ altrimenti $f(x)$ si dice IRRIDUCIBILE

Definizione: $K[x]$, $m(x) \in K[x]$

$f(x), g(x) \in K[x]$

$f(x) \equiv g(x) \mod m(x) \iff f(x) - g(x) = m(x) \cdot h(x)$

$h(x) \in K[x]$

la relazione ~~di congruenza~~ fra polinomi è una relazione di equivalenza

Esempio: $\mathbb{R}[x]$, $m(x) = x - \sqrt{2}$

$x^4 - 2x^2 = x^2 - 2 \mod (x - \sqrt{2})$

$x^2(x^2-2) - (x^2-2) = (x^2-1)(x^2-2) = (x^2-1)$

$= (x^2-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

l'insieme quoziente si denota $\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle} = \left\{ [f(x)] \,/\, f(x) \in K[x] \right\}$

$[+, \cdot]$

$[f(x)] + [g(x)] = [f(x) + g(x)]$

$[f(x)] \cdot [g(x)] = [f(x) \cdot g(x)]$

Proposizione $\left(\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle}, +, \cdot \right)$ quello commutativo unitario

Proposizione (come sono fatti gli elementi?)

$\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle}$, grado $m(x) = n$

allora in ogni classe di $\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle}$ esiste un unico polinomio di $K[x]$ di grado $< n$

Dimostrazione: (dell'esistenza di un polinomio di grado $< n$)

$[f(x)]$ $\quad f(x) = m(x)\,q(x) + r(x)$ $\quad$ grado $r(x) < n$

$f(x) - r(x) = m(x)\,q(x) \Rightarrow f(x) \equiv r(x) \mod m(x)$

$\Rightarrow r(x) \in [f(x)]$, grado $r(x) < n$

Dimostrazione: (dell'unicità) $r(x), r'(x) \in [f(x)]$

gr $r(x) < n$ $\quad$ gr $r'(x) < n$

$\Rightarrow r(x) \equiv r'(x) \mod m(x) \Rightarrow r(x) - r'(x) = m(x)\,s(x)$, $s(x) \in K[x]$

$\Rightarrow r(x) = r'(x)$

Osservazione: $\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle} = \left\{ [r(x)] \,/\, \substack{r(x) \in K[x] \\ \text{grad } r(x) < n} \right\}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — XIII lezione 28/10/10

STRUTTURE ORDINATE

DEF: Una relazione ρ su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se soddisfa le proprietà

1. Riflessiva $a \rho a \quad \forall a \in A$
2. $a \rho b$ e $b \rho a \Rightarrow a = b$ antisimmetrica
3. transitiva $a \rho b$ e $b \rho c \Rightarrow a \rho c \quad \forall a, b, c \in A$

Esempi:

1. $A = \mathbb{N}$ la relazione ρ è $a \rho b \iff a \leq b$ → TOTALE
2. $A = P(X)$ insieme delle parti di X la relazione ρ è $A \rho B \iff A \subseteq B$ → PARZIALE

è una relazione d'ordine:
- $A \subseteq A \quad \forall A \in P(X)$
- se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B$
- $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

In $P(\{1,2,3\}) \Rightarrow \{1\} \subseteq \{1,3\}$ ma $\{1,3\}$ e $\{2,3\}$ questi due elementi non sono confrontabili

Definizione: una relazione d'ordine ρ su un insieme A si dice **totale** se $\forall a, b \in A$ si ha $a \rho b$ oppure $b \rho a$. Si dice **PARZIALE** se esistono $a, b \in A$ che non sono in relazione (non sono confrontabili)

Es

3. $A = \mathbb{N}$

la relazione è $a \rho b \iff a / b$

$3 \rho 6 \iff$ ~~$1 \rho a \quad \forall a \in \mathbb{N}$~~

verificare che è una relazione d'ordine (non è una relaz. d'ordine perché non vale la P. transitiva)

Definizione: Un insieme A su cui è definita una relazione d'ordine ρ si dice un insieme ordinato e si denota ~~con ρ~~ con (A, ρ)

Si dice totalmente ordinato se ρ è un ordine totale
Si dice parzialmente ordinato se ρ è un ordine parziale
un insieme parzialmente ordinato si dice anche (poset)

Rappresentazione grafica di un insieme parzialmente ordinato finito

DIAGRAMMA DI HASSE

congiungo con una spezzata due elementi a, b se $a \rho b$ e a b scrivo sotto a, la spezzata diventa un segmento se $a \rho b$ e non esiste c tale che $a \rho c \rho b$

3) quantificatore esistenziale $\exists x \in E \mid p(x)$

$p(x)$, $q(x)$ predicati sull'insieme $E = \emptyset$

$p(x) \wedge q(x)$ $\quad p(x) \vee q(x)$ $\quad \neg p(x)$

"$p(x) \Rightarrow q(x)$" significa che rende vera $p(x)$ rende anche vera $q(x)$

l'implicazione logica non è commutativa $q(x)$ è la condizione necessaria perché si verifichi $p(x)$.

Es: $E = \mathbb{N}$
$p(x)$ = x è div per 6
$q(x)$ = x è div per 3

$p(x) \Leftrightarrow q(x)$ ovvero $p(x) \to q(x)$ ovvero $q(x) \to p(x)$ $\quad p(x) \Rightarrow q(x)$ (vero)

TEOREMA: è un implicazione logica $I \Rightarrow T$ $\quad I$ insieme delle ipotesi, T tesi
la dimostrazione è una successione finita d'implicazioni $I \Rightarrow I_1 \Rightarrow I_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow I_t = T$
logiche, prende le ipotesi per arrivare alla tesi

Dimostrazione per assurdo: Supponiamo di voler dimostrare che

$I \Rightarrow T$
- Supponiamo I vera
- Supponiamo T falsa

$$\begin{array}{c|c} I & \Rightarrow \neg I \\ \neg T & \end{array}$$

poiché I e $\neg I$ non possono essere entrambe vere allora T è vera

SISTEMI DI NUMERAZIONE:

Es: se r ed s sono due rette che tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni allora r ed s sono parallele

I = $\alpha = \beta$
T = r // s quindi $\alpha + \gamma + \delta = 180°$
Inoltre $\beta + \gamma = 180°$
quindi $\alpha + \gamma + \delta = \beta + \gamma$
allora $\beta > \alpha$

sistema di numerazione decimale.

$1899 = 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

DEFINIZIONE: Sia $K \in \mathbb{N}$ una sequenza $a_t a_{t-1} \dots a_1 a_0$ costituisca la rappresentazione del numero K in base $n > 1$

$K = a_t \cdot n^t + a_{t-1} \cdot a_{t-1} \cdot n^{t-1} + \dots + a_1 n + a_0 \cdot n^0$

Es: $11_{(16)} = 1 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16 = 17$

$100_{(16)} = 1 \cdot 16^2 = 256$

algoritmo delle divisioni successive

PROPOSIZIONE:
Per esprimere in numero naturale K in base $n > 1$ si esegue l'algoritmo delle divisioni successive

$$\begin{array}{l} K = q_0 n + r_0 \\ q = q_1 n + r_1 \\ q_{t-1} = q_t n + r_t \\ q = 0 \cdot n + q_t \end{array} \Bigg\} \to$$

$K = q_t r_t r_{t-1} \dots r_1 r_0 \,(n)$

ci fermiamo quando arriviamo al quoziente

Es:

256	16
256	16
0	16
	0

16	16
16	1
0	0
	1

17	2
16	8
1	8
	0

8	2
4	4
0	4
	0

4	2
2	2
0	2
	0

2	2
1	0
0	

1	2
0	

$10 = 10 + 0$
$17 + 10 = 27$
$= 11011$

sistema binario

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — XV lezione 2/11/10

Def: $f(x) \in K[x]$ $\alpha \in K$ si dice radice di $f(x)$ se $f(\alpha) = 0$

Def: $\alpha \in K$ si dice radice di molteplicità n se $(x-\alpha)^n \mid f(x)$ ma $(x-\alpha)^{n+1} \nmid f(x)$

TEOREMA di RUFFINI: $f(x) \in K[x]$, $\alpha \in K$

α è radice di $f(x) \iff (x-\alpha) \mid f(x)$

Dimostrazione $\Rightarrow$ $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$

con grado di $r(x) < 1$

$0 = f(\alpha) = \underbrace{(\alpha-\alpha)q(\alpha)}_{=0} + r \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow (x-\alpha) \mid f(x)$

Dimostrazione $\Leftarrow$ $f(x) = (x-\alpha)h(x)$

$f(\alpha) = (\alpha-\alpha)h(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ è radice di $f(x)$.

Osservazione: (corollario) $f(x) \in K[x]$ grado di $f(x) = 2$ o grado di $f(x) = 3 \Rightarrow f(x)$ è irriducibile $\iff \forall \alpha \in K \mid f(x) \neq 0$ ($f(x)$ non ammette radici in K)

Esempio: $\mathbb{Z}_2[x]$ $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$f(x) = x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ $f(x)$ irriducibile? (sì)

$f(\bar{0}) = \bar{1}$ $\bar{0}$ non è radice

$f(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} \Rightarrow$ non è radice

Esempio: $\mathbb{Z}_3[x]$

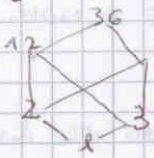
$f(x) = x^2 + x + \pi \in \mathbb{Z}_3[x]$ $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$f(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}$ $\bar{1}$ è radice ma essendo π è riducibile

Osservazione: $x^2 + x + \bar{1} \Rightarrow x^2 - \bar{2}\bar{x} + \bar{1} = (x-\bar{1})^2$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

$A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$

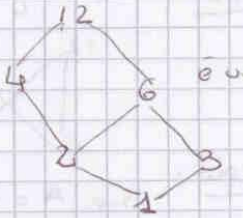


non è un reticolo

$3 \vee 2$ non esiste

Es: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\forall a, b \; \exists \; a \vee b \;$ e $\; a \wedge b$



è un reticolo

Geometria e Combinatoria

XV lezione 2/11/10

Esempio: $\mathbb{R}[x]$, $x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomio che non ammette radici

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1 \rangle} = \{[a+xb] \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$$

$[x^2+1]=[0]$ ~~[x]~~ $\quad [x^2]+[1]=[0] \Rightarrow [x]^2+[1]=[0]$

↳ x^2+1 ora ammette radici

$[x] = i$

Proposizione:

$\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle}$, grado $m(x) = n$

allora $\frac{K[x]}{\langle m(x) \rangle}$ è un campo $\iff$ $m(x)$ è irriducibile

Dimostrazione $\Rightarrow$ $m(x) = s(x)\,t(x)$, $s(x), t(x) \in K[x]$

$1 < \text{gr}\, s(x) < n$

$1 < \text{gr}\, t(x) < n$

$[0] = [m(x)] = [s(x)]\,[t(x)]$

$\Rightarrow [s(x)] = [0]$ o $[t(x)] = [0]$ assurdo perché $s(x)$, $t(x)$ sono

Esempio:

$x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2)$

$x^2((x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}))$

$x^2+1 = \frac{1}{2}(2x^2+2)$ $\Rightarrow$ polinomio irriducibile

Dimostrazione: $\Leftarrow$ $[f(x)] \neq [0]$

$(f(x), m(x)) = 1$ $\quad f(x)s(x) + m(x)t(x) = 1$

$[f(x)]\cdot[s(x)] = [1]$

$[s(x)] = [f(x)]^{-1}$

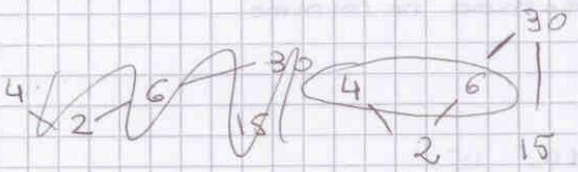
per ottenere campi dobbiamo prendere $m(x)$ irriducibile

$A = \{2, 4, 6, 15, 30\}$ disegnare ie diagramma di Hasse

determinare max, min

minimale, massimale

ie massimale è 30, 4
2, 15 sono i minimali



Osservazione: se A è finito non necessariamente ho massimo e minimo ho però elementi minimali e massimali

RETI COLI

Definizione: sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $B \subseteq A$ un suo sottoinsieme. Un elemento $a \in A$ si dice MINORANTE per B se $a \leq b$ $\forall b \in B$. $a \in A$ si dice MAGGIORANTE per B se $b \leq a$ $\forall b \in B$

Esempio: $B = \{4, 6\}$
2 è un minorante
non ci sono maggioranti



$B = \{6, 15\}$
30 è maggiorante
non esistono minoranti

Esempio: $A = \mathbb{Q}$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{3} < x < \sqrt{5}\}$$

minoranti di $B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \leq \sqrt{3}\}$

maggioranti di $B = \{z \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{5} \leq z\}$

Definizione: sia $(A, \leq)$ insieme parzialmente ordinato $B \subseteq A$

- $t \in A$ si dice ESTREMO INFERIORE di B (e si denota con $\inf(B)$) se t è ie massimo dei minoranti (può non esistere)
- $s \in A$ si dice ESTREMO SUPERIORE di B ($\sup(B)$) se s è ie minimo dei maggioranti

OSSERVAZIONE: inf e sup possono non esistere

B può non avere maggioranti o minoranti

oppure per l'inf ci sono minoranti, ma non è esiste ie massimo

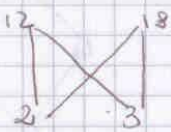
Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

5/11/10

OSSERVAZIONE: è inf se esiste è unico e è sup se esiste è unico

Esempio: $A = \{2, 3, 12, 18\}$ ordinato rispetto alla divisibilità



$B = \{2, 3\}$ $\quad$ mag di $B = \{12, 18\}$

A sup(B)

Esempio: sia $A = \mathbb{N}$ ordinato rispetto alla divisibilità

Siano a e $b \in \mathbb{N}$

$\inf(\{a,b\}) = MCD(a,b)$ è il massimo comun divisore

i minoranti sono i divisori comuni di a e b

$\sup(\{a,b\}) = m.c.m(a,b)$

Esempio: $A = P(X)$, X insieme, $\leq = \subseteq$

B, C insiemi di $P(X)$ $\quad B, C \subseteq X$

$\inf(\{B, C\}) = B \cap C$

i minoranti ~~sono~~ sono gli insiemi $D \subseteq X$ tali che $D \subseteq B$ e $D \subseteq C$. Il più grande rispetto a $\subseteq$ è $B \cap C$

$\sup(\{B, C\}) = B \cup C$

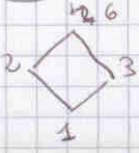
! Vogliamo studiare quegli insiemi parzialmente ordinati che comunque presi due insiemi esistono sia $\sup(\{a,b\})$ che $\inf(\{a,b\})$

RETICOLO (def)

Un insieme parzialmente ordinato $(A, \leq)$, si dice un reticolo se $\forall a, b \in A$, esistono sia $\sup(\{a,b\})$ che $\inf(\{a,b\})$

NOTAZIONE: $\sup(\{a,b\}) = a \vee b$ meet
$\inf(\{a,b\}) = a \wedge b$ join

ES $A = \{1, 2, 3, 6\}$ $\leq$ /



è un reticolo

Es $GF(2^2)$ calcolare

* vedere come si fanno le operazioni

$[x^4 - 3x^2 + 1] \cdot [x - 5] =$

$= [x^4 + x^2 + \bar{1}][x + \bar{1}] = [x^5 + x^3 + x + x^4 + x^2 + \bar{1}]$

$= [x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1}]$ due modi di procedere

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1} \;|\; x^2 + x + 1$

$r(x)$

perché è elemento per cui sto quozientando

$[x^2 + x + 1] = [0]$

$[x^5 + x^4 + x^3] + [x^2 + x + \bar{1}] \Rightarrow$

$\Rightarrow [x^3(x^2 + x + \bar{1})] = [x^3][x^2 + x + 1]$

$= [0]$

Es: $[x^4 - 3x^2 + \bar{1}] = [x^4 + x^2 + \bar{1}]$ → ma visto che $[x^2 + x + 1] = [\bar{0}]$

Proposizione: (ogni campo finito ha ordine p^n) $[(x^2 + \bar{1})] = [x] = [\bar{x}]$

Definizione Si dice che il campo K ha caratteristica p se p è il più piccolo intero positivo tale che $p \cdot u = 0$ (u unità moltiplicativa)

→ Si dice che K ha caratteristica 0 se $\forall$ intero $t \neq 0$. $: t \cdot u \neq 0$

Es: $\text{car}\,\mathbb{R} = 0 \quad \text{car}\,\mathbb{Z}_7 = 7 \quad 7 \cdot \bar{1} = \bar{7} = \bar{0}$

(!) la caratteristica di un campo o è 0 o è un numero primo

Dimostrazione: $\text{car}\,K = p$

per assurdo $p = r \cdot s \quad 1 < r, s < p$

$0 = p \cdot u = r \cdot u \cdot s \cdot u \Rightarrow r \cdot u = 0$ o $s \cdot u = 0$ assurdo

(!) un campo PROPOSIZIONE, K campo, $\text{car}\,K = p$ allora K contiene ie sottocampo $K' = \{u, 2u \dots, pu\}$ "isomorfo" a $\mathbb{Z}_p$

isomorfismo è una funzione biettiva

Dimostrazione

$K' \longrightarrow \mathbb{Z}_p$

$u \longmapsto \bar{1}$

$2u \longmapsto \bar{2}$

$\vdots$

$pu \longmapsto \bar{0}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

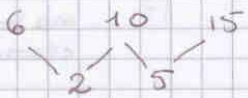
Geometria e Combinatoria

XIV lezione
30/10/10

Es:

$A = \{2, 5, 6, 10, 15\}$ $\quad \rho = \mid$

non c'è né massimo né minimo



OSSERVAZIONE d'ora in poi scriveremo $(A, \leq)$ per un insieme ordinato

Definizione: Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato
se $\exists\, m \in A$ tale che $m \leq a \;\forall a \in A$
allora m si dice (MINIMO) di A
Se $\exists\, M \in A$ tale che $a \leq M \;\forall a \in A$
tale che M si dice (MASSIMO) di A

OSSERVAZIONE Se $(A, \leq)$ è un insieme ordinato, allora se esiste il minimo, questo minimo è unico

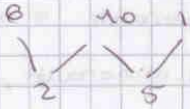
Dimostrazione siano m, m' due minimi per A

m è minimo $m' \in A \Rightarrow m \leq m'$
m' è minimo, $m \in A \Rightarrow m' \leq m$
} ANTISIMM

Definizione: Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato parzialmente
Un elemento $t \in A$ si dice (minimale) se $a \leq t$, allora $a = t \;(\forall a \in A)$

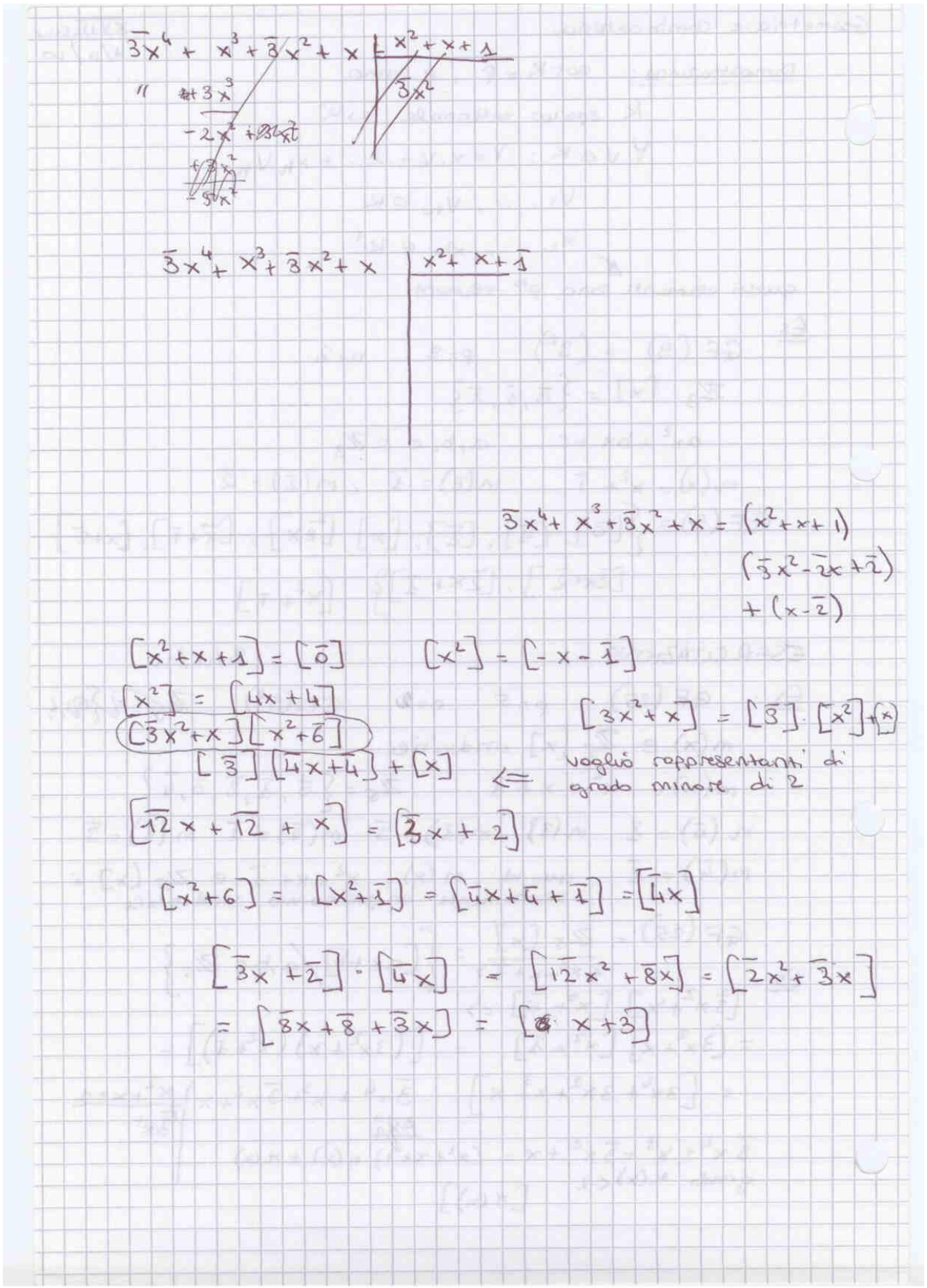
Un elemento si dice $s \in A$ si dice (MASSIMALE) se $s \leq b \Rightarrow s \leq b \Rightarrow s = b \;\forall b \in A$

Es:



massimali

minimali non ne c'è niente sopra


$\bar{3}x^4 + x^3 + \bar{3}x^2 + x \mid x^2 + x + \bar{1}$
$\bar{3}x^2$
$\bar{3}x^4 + x^3 + \bar{3}x^2 + x \mid x^2 + x + \bar{1}$
$\bar{3}x^4 + x^3 + \bar{3}x^2 + x = (x^2 + x + \bar{1})(\bar{3}x^2 - \bar{2}x + \bar{2}) + (x - \bar{2})$
$[x^2 + x + \bar{1}] = [\bar{0}]$
$[x^2] = [-x - \bar{1}]$
$[x^2] = [4x + 4]$
$[\bar{3}x^2 + x][x^2 + \bar{6}]$
$[\bar{3}][\bar{4}x + \bar{4}] + [x]$
$\Leftarrow$ voglio rappresentanti di grado minore di 2
$[3x^2 + x] = [\bar{3}] \cdot [x^2] + [x]$
$[\bar{12}x + \bar{12} + x] = [\bar{3}x + 2]$
$[x^2 + 6] = [x^2 + \bar{1}] = [\bar{4}x + \bar{4} + \bar{1}] = [\bar{4}x]$
$[\bar{3}x + \bar{2}] \cdot [\bar{4}x] = [\bar{12}x^2 + \bar{8}x] = [\bar{2}x^2 + \bar{3}x]$
$= [\bar{8}x + \bar{8} + \bar{3}x] = [\bar{8}x + 3]$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — XVI lezione 4/11/10

Proposizione:

$\frac{K[x]}{\langle m(x)\rangle}$ è un campo $\iff$ $m(x)$ irriducibile

se $gr\, m(x) = n$ allora $\frac{K[x]}{\langle m(x)\rangle} = \{[a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}] \mid a_i \in K\}$

$\mathbb{Z}_p$, p primo $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_p$ è un campo fondamentale di Galois

$m(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ irriducibile, grado $m(x) = n$

$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle m(x)\rangle}$ campo

Proposizione: Ie campo $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle m(x)\rangle}$ ha p^n elementi

Dimostrazione: $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle m(x)\rangle} = \{[a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}] \mid a_x \in \mathbb{Z}_p\}$

Definizione: Ie campo $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle m(x)\rangle}$ contenente p^n elementi, prende ie nome di Campo di Galois di ordine p^n e si denota $GF(p^n)$ (non ci sono altri campi finiti)

Es: $GF(2^2)$ $p=2$, $n=2$

$\mathbb{Z}_2$, $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\quad}$ $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

x^2, $x^2+\bar{1}$, x^2+x, $x^2+x+\bar{1}$

vedere i polinomi di grado due per ruffini, ie polinomio non ammette radici nel campo si dice irriducibile

$x^2+x+\bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ irriducibile poiché non ammette radici in $\mathbb{Z}_2$

$$GF(2^2) = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+x+\bar{1}\rangle} = \{[ax+b] \mid a,b \in \mathbb{Z}_2\}$$

a	b	ax+b
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	x
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$x+\bar{1}$

$GF(2^2) = \{[\bar{0}], [\bar{1}], [x], [x+1]\}$

(!) si devono mettere tra parentesi quadre perché indicano la classe equivalente

$x \in \mathbb{Z}_2[x]$

$[x] \in \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+x+\bar{1}\rangle}$

Esercizi

$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$(a,b) \longmapsto (-b,\ 3a+b)$

verificare se è iniettiva o suriettiva. Se è biettiva trovare f^{-1}

$f((1,3)) = (-3\ 6)$

suriettiva: $\forall (c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \exists (a,b) \mid f((a,b)) = (c,b)$

$(-b,\ 3a+b) = (c,d) \Rightarrow \begin{cases} -b = c \\ 3a+b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = b + \frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow$ F

iniettiva: sia $f((a,b)) = f((a',b')) \overset{?}{\Rightarrow} (a,b) = (a',b')$

$(-b,\ 3a+b) = (-b',\ 3a'+b') \Rightarrow \begin{cases} -b = -b' \\ 3a+b = 3a'+b' \end{cases}$

$\begin{cases} b = b' \\ 3a = 3a \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (a',b')$

$f^{-1}(c,d) = \left(\frac{c+d}{3},\ -c\right)$

Sia $g: (c,d) \longmapsto (d^3+c,\ c^5+3d)$

Calcolare $f\circ g$ e $g\circ f$ (esercizi)

$f: (d^3+c,\ c^5+3d) \Rightarrow (-c^5-3d,\ 3d^3+3c+c^5+3d)$

$g: (-b,\ 3a+b) \Rightarrow ((3a+b)^3-b,\ -b^5+9a+3b)$

Esercizi: Congruenze

$2x \equiv 5 \bmod 7$ è risolubile perché $(7,2) = 1$

$1 = 7\cdot a + 2b$
$1 = 7\cdot 1 - 3\cdot 2$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

XVII corso
4/11/10

Dimostrazione: $\text{car}K = p$, p primo

K spazio vettoriale su K'

$\forall v \in K : v = x_1 v_1 + \dots + x_h v_h$

$v_1, \dots, v_h \in K$

$x_1, \dots, x_h \in K'$

questi elementi sono p^h elementi

Es $GF(9) = (3^2)$ $p=3$ $n=2$

$\mathbb{Z}_3[x] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$

$m(x) = x^2 + \bar{1}$ $m(\bar{0}) = \bar{1}$, $m(\bar{2}) = \bar{2}$

$GF(9) = \{[\bar{0}], [\bar{1}], [\bar{2}], [x], [\bar{2}x], [x+\bar{1}], [x+\bar{2}], [\bar{2}x+\bar{2}], [\bar{2}x+\bar{1}]\}$ $[x^2+1]$

ESERCITAZIONE 9/11/10

Es: $GF(25)$ $p=5$ $n=2$ $GF=(5^2)$ $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, \dots\}$

$m(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ irriducibile

$m(x) = x^2 + x + \bar{1}$ $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$m(\bar{0}) = \bar{1}$ $m(\bar{1})$ $m(\bar{1}) = \bar{3}$ $m(\bar{2}) = \bar{1}$ $m(\bar{3}) = \bar{3}$

$m(\bar{4}) = \bar{1}$ quindi $m(x) = x^2 + x + \bar{1}$ e $\mathbb{Z}_5[x]$ è sicuramente un polinomio irriducibile

$GF(25) = \dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{\langle x^2 + x + \bar{1} \rangle} = \{[ax+b] / a, b \in \mathbb{Z}_5\}$

Es:

$[\bar{3}x^2 + x][x^2 + \bar{6}] \Rightarrow$

$= [3x^2 + x][x^2 + \bar{1}] = [(3x^2 + x)(x^2 + \bar{1})] =$

$= [3x^4 + 3x^2 + x^3 + x]$ $\bar{3}x^4 + x^3 + \bar{3}x^2 + x \;\big|\; x^2 + x + 1$

$\bar{3}x^4$ $3x^2$

$\bar{3}x^4 + x^3 + \bar{3}x^2 + x = (x^2 + x + 1)\, q(x) + r(x)$

grado $r(x) < 2$ $[r(x)]$

Definizione: un reticolo tale che valgono la proprietà (1) e (2) si dice (DISTRIBUTIVO)

Es: $(P(X), \subseteq)$

X insieme $A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$

Es: $(R, \leq)$ dimostrare che:

$a \leq b \iff a \wedge b = a$

$a \leq b \iff a \vee b = b$

Definizione: Se $(R, \leq)$ reticolo possiede massimo e minimo si dice limitato, ie massimo si denota con M o 1 e ie minimo si denota con m o 0

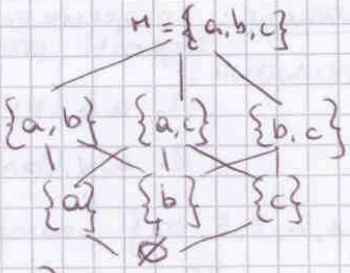
Definizione: Sia $(R, \leq)$ un reticolo limitato con $m=0$ e $M=1$ tale reticolo si dice COMPLEMENTATO se $\forall a \in R$ esiste almeno un $b \in R$ tale che: $a \vee b = M = 1$

$a \wedge b = m = 0$

Es:

$X = \{a, b, c\}$

$R = (P(X), \subseteq)$



$A = \{a, c\}$

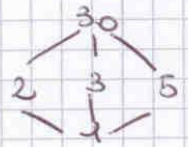
B tale che $A \cap B = \emptyset$

$B = \{b\}$ $A \cup B = M = \{a, b, c\}$

$P(X)$ è complementato

$A \in P(X)$ $B = \complement_X(A)$

Es



complementore di 1? è 30

$2 \vee 3 = 30$

$2 \wedge 3 = 1$

$2 \vee 5 = 30$

$2 \wedge 5 = 1$

è complementato ma in generale ie complementore non è unico

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

XVIII lezione
8/11/10

ESERCIZI

$9x \equiv 21 \mod 15$ $\quad x = 14$ $\quad (15, 9) = 3$

sol $\bar{x}' = \bar{x} + k \cdot \frac{m}{(a,m)}$ tutte soluzioni non congruenti fra loro

$k \in \{0, 1, 2\}$ vedere

ie massimo comun divisore.

(15) Es: $|A| = n$ cardinalità dell'insieme

$m < n$

$|B| = m \quad \exists f : A \to B$ iniettive?

no perche sono finiti, alcuni elementi di A avranno la stessa immagine

(13) $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ è invertibile $\iff (a, m) = 1$

(9) Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(a,b) = (2a, a-b)$

suriettività

$\forall (z,w) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f((a,b)) = (z,w)$

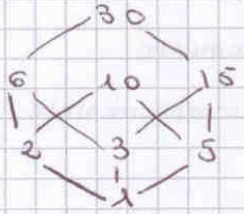
$(2a, a-b) = (z,w)$

$2a = z \qquad a - b = w$

$a = \frac{z}{2} \qquad \frac{z}{2} - w = b \qquad \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2} - w\right)$

TEOREMA DI STONE: ogni algebra di Boole finito (A è finito) è "isomorfa" a un algebra di tipo P(x), X insieme finito

Es: Verificare che $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ ordinato rispetto alla divisibilità è un algebra di Boole



$M = 30 \quad m = 1$

$(3 \vee 2) \vee 5 = (3 \vee 5) \vee 2$

$6 \vee 5 = 30$

$15 \vee 2 = 30$ } ASSOCIATIVA

$(3 \wedge 5) \wedge 2 = (2 \wedge 5) \wedge 3$

$1 \wedge 2 = 1 \wedge 3$ } ASSOCIATIVA

$2 \vee 3 = 3 \vee 2$ COMMUTATIVA

$3 \vee (2 \wedge 5) = (3 \vee 2) \wedge (3 \vee 5)$

$3 \vee 1 = 6 \wedge 15 \qquad 1 \neq 3$ } non è un algebra di Boole in quanto non vale la proprietà seguente.

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

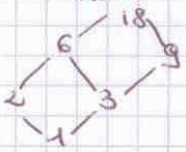
Geometria e Combinatoria — XIX lezione 12/11/10

RETICOLI E ALGEBRE DI BOOLE:

Definizione: Reticolo $(R, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato tale che $\forall a,b \in R \ \exists \sup\{a,b\} = a \vee b$

$\exists \inf\{a,b\} = a \wedge b$

Es: divisori di $18 \subseteq \mathbb{N}$



è un reticolo $\leq$ = la divisibilità

$\{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$



non è un reticolo

Proposizione:

In un reticolo valgono le seguenti proprietà:

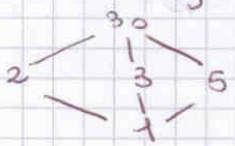
1. COMMUTATIVA: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a \ \forall a,b \in R$
2. ASSOCIATIVA: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. ASSORBIMENTO: $a \vee (b \wedge a) = a$ $a \wedge (b \vee a) = a$
4. IDEMPOTENZA: $a \vee a = a$ e $a \wedge a = a$

Osservazione: in generale in un reticolo non valgono le seguenti proprietà:

DISTRIBUTIVA:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

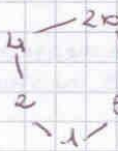
Es: $\{1, 2, 3, 5, 30\}$ ordinato rispetto alla divisibilità



è un reticolo ma per esempio non vale la (2.)

$2 \vee (3 \wedge 5) = 2$
$(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30$
$\} \ 2 \neq 30$

Es: $\{1, 2, 4, 5, 20\}$



$2 \vee (4 \wedge 5) = 2$
$(2 \vee 4) \wedge (2 \vee 5) = 4$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Proprietà del prodotto esterno: (operazione esterna) → con numeri reali rispetto alla somma di due vettori

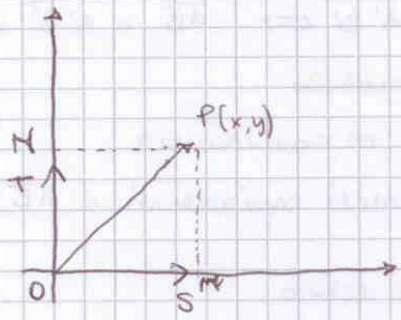
1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V: (\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ (ASSOCIATIVA)

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \cdot \alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$ (DISTRIBUTIVA)

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V: \alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

V spazio vettoriale reale



$\overrightarrow{OS} = \vec{i} \qquad \overrightarrow{OT} = \vec{j}$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ versori degli assi perché hanno modulo = 1

$\forall \overrightarrow{OP}\ \vec{v} = \overrightarrow{OP} \in V$

1) $\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}}$

ie vettore $\overrightarrow{OP}$ è combinazione lineare dei versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono definiti come versori dei perpendicolari quindi ho è assurdo

2) $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \vec{0}$, con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$?

$\alpha \neq 0 \Rightarrow \vec{i} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{j} = K \cdot \vec{j}$

$K = -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$

↳ assurdo poiché $\vec{i} \perp \vec{j}$

$\beta \neq 0 \Rightarrow \vec{j} = h \cdot \vec{i}$ assurdo

2) $\boxed{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0}$

i vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono <u>linearmente indipendenti</u> perché sono ortogonali e non paralleli

$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ che verifica 1) e 2)

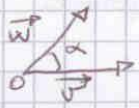
B si dice <u>base</u> di V (posso rappresentare tutti i vettori con 1))

Prodotto scalare: $V = \{$vettori geometrici del piano$\}$

$\vec{v}, \vec{w} \in V$: $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\vec{v} \times \vec{w}$ (tre notazioni diverse)

$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$ (non è un vettore)

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$

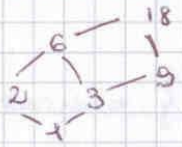


cosa rappresenta graficamente il prodotto scalare?

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — XIX lezione 12/11/10

Es: un reticolo non complementato



- è limitato (reticolo)
- 1 ammette complemento è 18
- 18 è complemento di 9 è 2

non c'è un elemento che le soddisfa entrambe $\begin{cases} 6 \vee x = 18 \\ 6 \wedge x = 1 \end{cases}$

→ sia 6 che 3 non hanno complemento

Definizione: Un reticolo distributivo e complementato si dice reticolo di Boole

Es: $R = \{P(x), \subseteq\}$

① un reticolo booleano è un algebra di Boole

Definizione: ALGEBRA DI BOOLE

è un insieme A dotato di due operazioni binarie $\wedge, \vee$ e di un applicazione $' : A \to A'$, $a \mapsto a'$ e di due elementi particolari chiamati 0 e 1 tale che:

1. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ASSOCIATIVA
2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
2. $a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$ COMMUTATIVA
3. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ DISTRIBUTIVA
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
4. $a \vee (a \wedge b) = a$; $a \wedge (a \vee b) = a$
5. $a \wedge a' = 0$; $a \vee a' = 1$

Osservazione: un reticolo booleano è un algebra di Boole. D'altra canto su un algebra di Boole posso definire una relazione d'ordine in questo modo

$$a \leq b \underset{\text{def}}{\iff} a \wedge b = a$$

Rispetto a questa relazione d'ordine l'algebra di Boole è un reticolo booleano

$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$ $\quad \vec{v}\cdot\vec{v} = x^2+y^2+z^2$

$|\vec{v}|^2 = x^2+y^2+z^2$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Es: determinare i vettori $\vec{w}$ di modulo 2 parallelo a $\vec{v}$

$\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{w} = \alpha\vec{v} \quad /\!/ \vec{v}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{w} = \alpha\vec{i} - 2\alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k}$ $\quad |\vec{w}| = 2$

$|\vec{w}| = \sqrt{\alpha^2+4\alpha^2+9\alpha^2} = 2$ $\quad \sqrt{14\alpha^2} = 2$ $\quad \alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{12}}$

$\vec{w_1} = \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{6}{\sqrt{14}}\vec{k}$ $\quad \vec{w_2} = -\frac{2}{\sqrt{12}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{6}{\sqrt{14}}\vec{k}$

Es: $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{k}$

Determinare i vettori $\vec{u}$ di modulo 3 perpendicolari a $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + k\vec{j}$ $\quad$ x, y, z si dicono componenti o coordinate del vettore u nella base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$|\vec{u}| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow x - y + z = 0$

$\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow -2x + z = 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ x - y + z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ x - y + 2x = 0 \\ z = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+9x^2+4x^2 = 9 \\ y = 3x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{9}{14} \\ y = 3x \\ z = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\frac{3}{\sqrt{14}} \\ y = \pm\frac{9}{\sqrt{14}} \\ z = \pm\frac{6}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

$\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}, \frac{6}{\sqrt{14}}\right)$ (x, y, z)

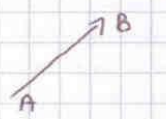
$\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-9}{\sqrt{14}}, -\frac{6}{\sqrt{14}}\right)$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — 20ª XX lezione — 15/11/10

ALGEBRA LINEARE:

Studio degli spazi vettoriali:



segmento orientato, : direzione, verso, modulo

$S = \{$ segmenti orientati del piano $\}$

Relazione di EQUIPOLLENZA in S

$\overrightarrow{AB}$ è equipollente a $\overrightarrow{A'B'} \iff \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ hanno la stessa direzione (da accertarsi) verso e lo stesso modulo

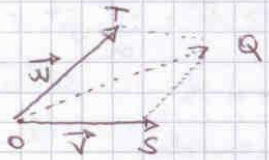
LA RELAZIONE DI EQUIPOLLENZA È DI EQUIVALENZA

$[\overrightarrow{AB}] = \{$ tutti i segmenti orientati equipollenti a $\overrightarrow{AB}\}$

$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ vettore geometrico libero

$V =$ insieme $\{$ vettori liberi del piano$\}$

$(V, +)$ $\quad \vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w}$



Proprietà della somma:

1. Proprietà commutativa: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
2. Proprietà associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\exists\, \vec{0} \in V$, elemento neutro rispetto alla somma
4. $\forall \vec{v} \in V \quad \exists\, \vec{v} \in V$

$(V, \cdot)$ Prodotto esterno con elementi di $\mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$: $\alpha \vec{v} \in V$

$\alpha \vec{v}$

- direzione: è quella di $\vec{v}$ (parallelismo)
- verso: è quello di $\vec{v}$ se $\alpha > 0$; quello opposto se $\alpha < 0$
- modulo: $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$

una lunghezza deve essere positiva

$$= xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i}$$
$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

per memorizzare ie prodotto vettoriale

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}$$

Prodotto della prima diagonale per meno ie prodotto della secondo $+ \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$

Es: $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ a) $\vec{v} \wedge \vec{w}$, Determinare;

$\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ 2) vettori di modulo 1 e perpendicolari a $\vec{v}$ e $\vec{w}$

1) $$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 11\vec{j} - 8\vec{j} - 5\vec{k}$$

2) $\vec{u} \,/\!/\, \vec{\mu} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, $|\vec{u}| = 1$

$\vec{v} \wedge \vec{w} \,/\!/ (\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{v}$, $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{w}$

$\alpha(\vec{v} \wedge \vec{w}) \,/\!/\, \vec{v} \wedge \vec{w}$

$\alpha(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \sqrt{210\alpha^2} = 1 \quad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{210}}$

(!) solo quando abbiamo modulo 1, basta dividere per ie modulo

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — XXIII lezione 19/11/10

ESERCIZI:

$\vec{v}, \vec{w}$ e V_0 $\quad \vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\alpha$

Sia $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormale di V_0 $\left(\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \right.$
$\left. |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1\right)$

$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

Es: Determinare per quali valori di t i vettori sono ortogonali (quando il prodotto scalare è nullo)

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 18 - 4t + 6 = 0 \iff t = 6$

Es: Siano $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Determinare l'angolo convesso α tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$

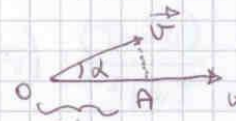
$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\alpha \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = 3 - 2 - 10 = -9$

$|\vec{v}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \cos\alpha \implies \alpha = \arccos\frac{-9}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{14}} =$$

Es: $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

1) Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$ lungo la direzione di $\vec{w}$.
Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\vec{v}$ se piano perpendicolare a $\vec{w}$



$\overrightarrow{OA} = (\vec{v}\cdot\vec{w})\cdot\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$

$\overrightarrow{OA} = \underbrace{(\vec{v}\cdot \text{versore di } \vec{w})}_{|\vec{v}|\cos\alpha}\,\text{versore}\,\vec{w}$

//

Definizione: $A = (a_{ij})$ quadrata di ordine n ($i = 1 \dots, n$, $j = 1 \dots, n$) A si dice **triangolare superiore** se

$a_{ij} = 0$ per $i > j$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ae di sotto della diagonale devono essere 0

Definizione: $A = (a_{ij})$ quadrato di ordine n si dice **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ per $i < j$

Es: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Definizione: A matrice $m \times n$ a coefficienti reali, si dice **matrice trasposta** di A e si denota A^T la matrice ~~$m \times n$~~ $n \times m$ ottenuta scambiando le righe con le colonne

Es: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ matrice 2×3 $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ matrice 3×2

$A \neq A^T$

Osservazione: $A = (a_{ij})$

$A^T = (a_{ji})$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ $A \neq A^T$

Geometria e Combinatoria

XXI lezione 16/11/10

PRODOTTO VETTORIALE: si può definire solo nel caso dello spazio

$V = \{$vettori geom. dello spazio$\}$

$\vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v} \wedge \vec{w} \in V$

$\vec{v} \wedge \vec{w}$

direzione: perpendicolare al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$

verso: $\vec{v}$ rotazione su $\vec{w}$ in senso antiorario



modulo: $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (area del parallelogramma)

Proprietà:

1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$ (cambia solo il verso)

2) $\forall k \in \mathbb{R} : k(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (k\vec{v}) \wedge \vec{w}$

3) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

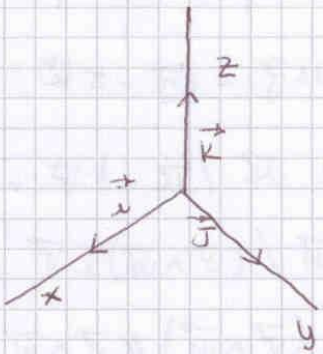
sono uguali al prodotto scalare

4) $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ ($\vec{v}$ e $\vec{w}$ non nulli) $\iff \vec{v} \parallel \vec{w}$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ base di V

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\quad$ $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$
$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$
$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$



$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) +$$
$$yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) +$$
$$+ zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

nulli perché paralleli

⇓

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Prodotto esterno: Per dare la struttura di spazio vettoriale

$M_2(\mathbb{R})$, $\cdot$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Proprietà:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ DISTRIBUTIVA
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4) $1 \cdot A = A$ $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$

$M_2(\mathbb{R})$, $+$, $\cdot$ prodotto esterno

Spazio vettoriale reale

Si può generalizzare al caso $M_n(\mathbb{R})$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ spazi vettoriali reali

Prodotto di Matrici: (righe per colonne)

$(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$ matrice $1 \times n$ $\cdot$ $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ matrice $n \times 1$ — n deve essere lo stesso

$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$

Es: $(1\ -2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 7$

Es:

$M_2(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$

$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$

c_{ij} si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A per la j-esima colonna di B

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

XXII lezione
18/11/10

MATRICI:

matrice $m \times n$ (m → righe, n → colonne) a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m3} \end{pmatrix}$$

m righe
n colonne

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

i indica di riga
j indica di colonna

Es: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 2×3
$a_{23} = 5$

Definizione: una matrice si dice quadrata di ordine n se il numero delle righe n è uguale al numero delle colonne

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1/2 \end{pmatrix}$

Definizione: una matrice quadrata si dice diagonale se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definizione: se $A = (a_{ij})$ è quadrata la linea che contiene gli elementi $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$ si dice diagonale principale

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

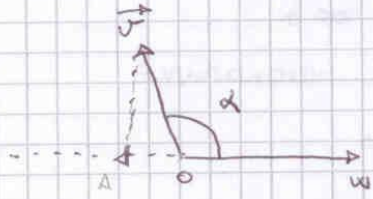
Definizione: $A = (a_{ij})$ quadrata di ordine n $(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n)$

Es:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica

① $\vec{v} \cdot \text{versore}\,\vec{w} = |\vec{v}|\,|\text{versore}\,\vec{w}|\cos\alpha$ $\qquad \text{vers}\,\vec{w} = \dfrac{\vec{w}}{|w|}$

$\vec{OA} = |OA|\ \text{versore}\,\vec{w}$ $\qquad \alpha < \frac{\pi}{2}$



$\alpha > \frac{\pi}{2}$

$\vec{OA} = -|\vec{OA}|\ \text{versore}\,\vec{w}$

$|\vec{OA}| = |\,|\vec{v}|\cos\alpha\,| = |\,\vec{v} \cdot \text{versore}\,\vec{w}\,|$

$\vec{OA} = (\vec{v} \cdot \text{vers}\,\vec{w})\,\text{vers}\,\vec{w}$ $\qquad \left(\alpha < \frac{\pi}{2}\ \ \vec{v} \cdot \text{vers}\,\vec{w} > 0\right.$

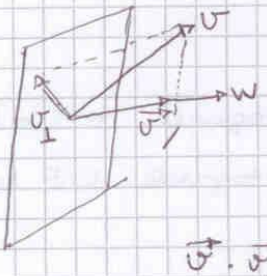
$= \left(\vec{v} \cdot \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}\right) \cdot \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = (\vec{v} \cdot \vec{w})\dfrac{\vec{w}}{|w|^2}$ $\qquad \left.\alpha > \frac{\pi}{2}\ \ \vec{v} \cdot \text{vers}\,\vec{w} < 0\right)$

$\rightarrow$ proiezione ortogonale di $\vec{v}$ lungo la direzione di $\vec{w}$

$$|\,|\vec{v}|\cos\alpha\,| = \begin{cases} |\vec{v}|\cos\alpha, & \text{se } |\vec{v}|\cos\alpha \geq 0 \\ -|v|\cos\alpha, & \text{se } |\vec{v}|\cos\alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{OA} = (\vec{v} \cdot \text{vers}\,\vec{w})\,\text{vers}\,\vec{w}$

$\alpha > \frac{\pi}{2} \rightarrow -(-\vec{v} \cdot \text{vers}\,\vec{w})\,\text{vers}\,\vec{w}$



$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_{//}$ → cadimostro

Infatti $\vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_{//} =$

$= (\vec{v} - \vec{v}_{//}) \cdot \vec{v}_{//} = \vec{v} \cdot \vec{v}_{//} - |\vec{v}_{//}|^2$

$\vec{v} \cdot \vec{v}_{//} = \vec{v} \cdot \left((\vec{v} \cdot \vec{w})\dfrac{\vec{w}}{|w|^2}\right) = \dfrac{(\vec{v} \cdot \vec{w})}{|w|^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) =$

$= |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 = \dfrac{|\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} \cos^2\alpha$

$\vec{v} \cdot \vec{v}_{//} - |\vec{v}_{//}|^2 = 0$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria

XXII lezione
18/11/10

Definizione: A, quadrata di ordine n si dice simmetrica se coincide con la sua $A = A^T$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = A^T$

$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{\text{matrici } m \times n \text{ a coefficienti reali}\}$

$M_n(\mathbb{R}) = \{\text{matrici di ordine } n \text{ a coefficienti reali (quadrate)}\}$

$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d, \in \mathbb{R} \right\}$

$(M_2(\mathbb{R}), +)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \Rightarrow A+B = (a_{ij}+b_{ij})$

Proprietà: (operazione interna) → per dire che ha struttura di spazio vettoriale

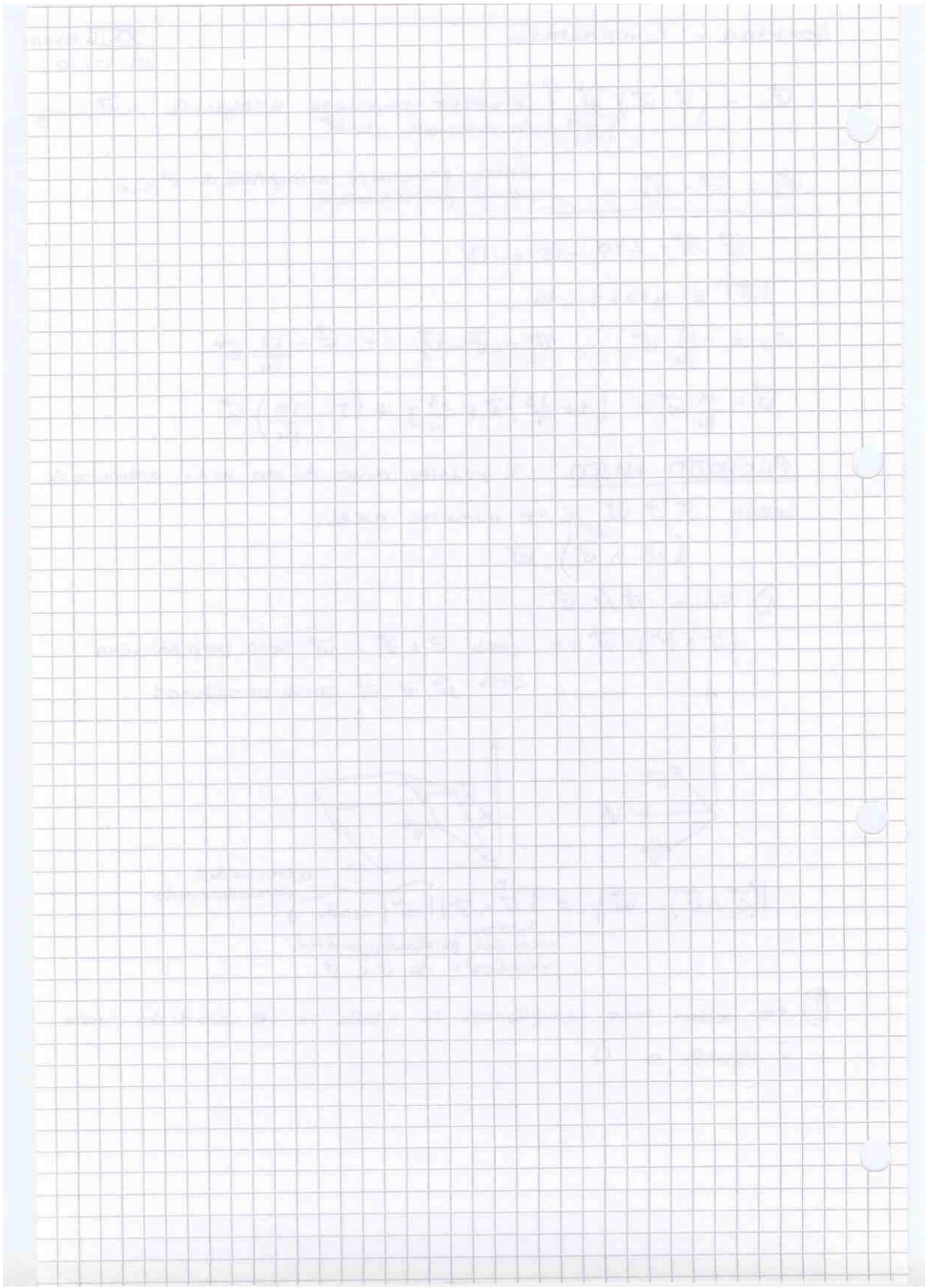
1. proprietà commutativa
2. proprietà associativa
3. $\exists \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemento neutro rispetto a +
4. $\forall A \in M_2(\mathbb{R})\ \exists -A \in M_2(\mathbb{R})$

Es: $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ $A, B, \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XX lezione 15/11/10

Proprietà del prodotto scalare:

1) Proprietà commutativa
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \alpha(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\alpha\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot(\alpha\vec{w})$
3) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
4) $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \ (\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}) \iff \vec{v} \perp \vec{w} \quad (\cos\alpha = \frac{\pi}{2})$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEL PRODOTTO SCALARE

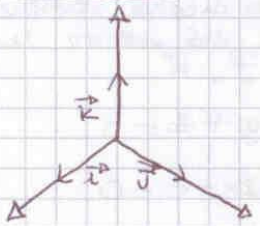
$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j})(x'\vec{i} + y'\vec{j}) =$

$= xx'(\vec{i}\cdot\vec{i}) + yx'(\vec{j}\cdot\vec{i}) + xy'(\vec{i}\cdot\vec{j}) + yy'(\vec{j}\cdot\vec{j})$

$= \boxed{xx' + yy'}$

Nello spazio



$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ base di V

$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = xx' + yy' + zz'$

Es: $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 3 + 1 - 8 = -4$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{14} \quad (|\vec{w}| = \sqrt{18})$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|\cdot|\vec{v}| = 9 + 1 + 4 = x^2 + y^2 + z^2$

se voglio l'angolo $\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha$

$\frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} \Leftarrow -4 = \sqrt{14}\cdot\sqrt{18}\cdot\cos\alpha$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & -10 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ matrice 3×3

Osservazione: $M_n(\mathbb{R})$, $\cdot$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

I matrice identica, unità moltiplicativa

(esiste l'inverso?)

Definizione: $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice invertibile se esiste

$\exists X \in M_n(\mathbb{R}) \;/\; A \cdot X = X \cdot A = I$

$X = A^{-1}$ matrice inversa di A

Proposizione: $A \in M_n(\mathbb{R})$

Se $\exists X \in M_n(\mathbb{R}) \;/\; AX = XA = I$

allora essa è unica

Dimostrazione: Supponiamo che $\exists Y \in M_n(\mathbb{R}) \;/$

$AY = YA = I$

$$Y = YI = Y(AX) = (YA)X = IX = X$$

se esiste ~~quella~~ la matrice è unica

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & +2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \;/\; AX = XA = I$$

Sistema di 4 equazioni in 4 incognite che non ammette soluzioni

$2x + (-z) = 1$

$2y - w = 0 \qquad 2y = w$

$-4x + 2z = 1$

$-4y + 2w = 0 \qquad -4y = -2w$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatorio

XXIII lezione
19/11/10

$\vec{v}_{\parallel} = \left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$ | ie vettore proiezione ortogonale di $\vec{v}$ lungo la direzione di $\vec{w}$

$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$ | vettore proiezione ortogonale di $\vec{v}$ sul piano perpendicolare

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 2+0-15 = -13$

$|\vec{w}|^2 = 4+1+9 = 14$

$v_{\parallel} = -\frac{13}{14}\vec{w}$, $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - \frac{13}{14}\vec{w}$

$\vec{v} + \frac{13}{14}\vec{w} = \left(1+\frac{13}{7}\right)\vec{i} + \frac{13}{14}\vec{j} + \left(5-\frac{39}{14}\right)\vec{k}$

PRODOTTO MISTO: ie prodotto misto di una terna ordinata di vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ è ie numero reale

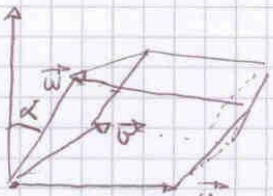
$$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$$

1) siano $\vec{u} /\!/ \vec{v}$

$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\cdot\vec{w} = 0 \iff \vec{u}\wedge\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono perpendicolari

$\iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari





$\left|\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\cdot\vec{w}\right| = \left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|\left|\vec{w}\right|\cos\alpha$

$|\vec{u}\wedge\vec{v}|$: area del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$|\vec{w}|\cos\alpha$: altezza del parallelepipedo

(!) tre vettori sono complanari se e solo se ie prodotto misto è uguale a 0

Es: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad a_{21} = 4$

complemento algebrico $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = -3$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad a_{33} = 3$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5$

Osservazione: $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ Si può anche scrivere così

TEOREMA DI LA PLACE:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ allora

$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} =$ Sviluppo di la place secondo la i-esima riga

posso inoltre fare lo sviluppo di La Place secondo la colonna j-esima

$= a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$

Es: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det A = -1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= -18 - 48 - 14 = -80$

$\det A = -3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= -48 - 32 = -80$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria — ~~XXII~~ lezione 18/11/10

Es: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$

$c_{11}=1\cdot 4+(-2)\cdot(-2)$

$c_{12}=1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 12 & -3\end{pmatrix}$ $\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ ie prodotto tra due matrici non è commutativo

Verificare la proprietà associativa del prodotto? per casa

proprietà distributiva

$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad A\cdot I=A=I\cdot A$ I unità moltiplicativa

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ due matrici diverse dalla matrice nulla moltiplicate tra loro possono dare la matrice nulla (a differenza del ~~Reale~~ prodotto in $\mathbb{R}$)

A matrice $m\times n$
B matrice $n\times k$
} ie numero di ~~colonne~~ righe di B deve essere uguale al numero di ~~righe~~ colonne di A

$A\cdot B=C=(c_{ij})$ matrice $m\times k$

c_{ij}: prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B

Es: $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}$ A matrice 2×3

$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ B matrice 3×2

$A\cdot B=\begin{pmatrix}(-2)(-1)+1\cdot 3+3\cdot 4 & (-2)2+1\cdot 0+3\cdot(-2)\\ 0\cdot(-1)+(-4)\cdot 3+2\cdot 4 & 0\cdot 2+(-4)\cdot 0+2(-2)\end{pmatrix}$

$A\cdot B$ matrice 2×2

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ A^{-1}?

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 28 = 29$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 11 & 7 & 1 \\ -14 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -14 \\ -2 & 7 & -1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 11 & -14 \\ -2 & 7 & -1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Es: (d'esame)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

1) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la A è invertibile
2) fissato un valore di k determinare l'elemento a_{31} di A^{-1}

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e Combinatoria 22/11/10

XXIII lezione

Es: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$BY = YB = I$

sistema di 4 eq. in 4 inc. che ammette soluzione

$\Rightarrow \exists\, Y$ (esiste l'inversa di B)

Determinante di una matrice quadrata

$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longmapsto \det A$

1) n = ordine della matrice $n=1$: $A = (a) \Rightarrow \det A = a$

2) $n=2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3) $n=3$: $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

REGOLA DI SARRUS

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23}\, a_{31} + a_{13} a_{21}\, a_{32} - \\ - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{32}\, a_{23}\, a_{11} + a_{33}\, a_{21}\, a_{12} \end{pmatrix}$$

4) Dobbiamo introdurre una ~~ma~~ regola per calcolare ie determinante di una matrice n (riducendoci all'ordine n)

Definizione: $A = (a_{ij})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

si definisca complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di A e si denota A_{ij} ie numero reale:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \bar{A}$, dove $\bar{A}$ è la matrice di ordine $n-1$ ottenuta da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna

mi da solo ie segno

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Es:

① $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$

→ metodo di eliminazione di Gauss (semplifico le espressioni volta per volta)

$\begin{pmatrix} +1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & +2 & 2 \\ 3 & 1 & +2 & 3 \end{pmatrix}$ matrice a gradini $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$

② $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 3y - 4z = 4 \\ 7z = -10 \end{cases}$

sistemi equivalenti : ammettono le stesse soluzioni

① e ②

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XXIV lezione 23/11/10

Proprietà dei determinanti:

1) Se A ha una riga o colonna nulla $\Rightarrow \det A = 0$
2) Se A ha due righe (colonne) proporzionali $\Rightarrow \det A = 0$
3) Se in A si scambiano due righe (colonne), si ottiene una matrice $\bar{A}$ / $\det \bar{A} = -\det A$
4) Se $A = (a_{ij})$ è diagonale (o triangolare inferiore o superiore) $\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$
   ($\det I = 1$, $\det 0 = 0$)
5) $\det A^T = \det A$
6) $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (teorema di Binet)

Definizione: $A = (a_{ij})$, A quadrata di ordine n si definisce matrice AGGIUNTA di A e si denota A^* la matrice trasposta della matrice i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi di A, ovvero se $\bar{A} = (A_{ij})$: $A^* = \bar{A}^T = (A_{ji})$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{A}$ = matrici dei complementi algebrici di A

TEOREMA: $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

risulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

INVERSA DI UNA MATRICE (deve essere quadrata)

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $I \in M_n(\mathbb{R})$ → matrice identica

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right)$$ matrice $n \times 2n$

→ riduco questa matrice in forma canonica speciale

ottengo

$$\leftarrow \left(\begin{array}{c|c} B & C \end{array}\right)$$

Se $B = I$, allora
A è invertibile e $C = A^{-1}$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -2(1+6) - 3(1-12)$
$= -14 + 33$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

(A | I)

scambio le prime due righe

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria

XXIV lezione
23/11/10

$\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$

$\det A = 1 - 2K - 1(2K-1) = -4K + 2$

$\det A = 0$ per $K = \frac{1}{2}$

$\exists A^{-1}$ per $K \neq \frac{1}{2}$ deciso $K=0 \Rightarrow \det A = 2 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a_{31} di $A^{-1} = \frac{A_{13}}{\det A} = -\frac{1}{2}$ (→ complemento algebrico)

Es: determinare, se esiste una matrice A / $\det(A^4) = -16$ $A \in M_2(\mathbb{R})$

Es: determinare, se esiste, una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ $\det(A^3) = -8$

$\det(A^4) = \det(A \cdot A \cdot A \cdot A) = (\det(A))^4 = -16 \Rightarrow \nexists A$

$\det(A^3) = (\det A)^3 = -8 = (-2)^3 \Rightarrow \det A = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

ALGORITMO DELLA RIDUZIONE A GRADINI (di una matrice)

Definizione: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ → qualsiasi matrice

Si definisce pivot della riga R_i ie suo primo elemento non nullo

Es: $A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 3 & 4 \\ 0 & \textcircled{3} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{7} \end{pmatrix}$

Definizione $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si dice matrice a scala o a gradini se ie pivot della riga R_{i+1} si trova a destra della riga R_i

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XXV lezione 26/11/10

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE

1) Scambiare due righe
2) Moltiplicare una riga per un numero reale non nullo
3) Sostituire una riga con la somma della riga stessa e di un multiplo di un altra ovvero

$$R_i \longrightarrow R_i + kR_j \quad , \quad k \in \mathbb{R} \quad , \quad k \neq 0$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$ $\qquad R_2 : 1\ -1\ 2\ -3\ 1$

$R_3 \longrightarrow R_3 + R_1$ $\qquad -R_1 : -1\ 2\ -3\ 4\ -4$

$0\ 1\ -1\ 1\ -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$R_3 \longrightarrow R_3 + 3R_2$

$R_3 : 0\ -3\ 4\ -1\ 3$

$3R_2 : 0\ 3\ -3\ 3\ -9$

$0\ 0\ 1\ 2\ -6$

Definizione: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è in forma canonica speciale se:

1) È a gradini
2) I pivot sono tutti uguali a 1
3) In ogni colonna con un pivot ie pivot è l'unico elemento non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1+2) + 1(1+1) = -2+2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1-2) + 1(-2-1) + 2(4-1) = -6+6 = 0$$

$$\text{rg } A = 2$$

Es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2 \leq \text{rg } B \leq 4$$

$$\det B = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3k - 6$$

$-k+1+2+k = 3 \qquad -2(-1-1) + 1(1+1) = 4+2 = 6$

per $k \neq 2 \Rightarrow \text{rg } B = 4$

per $k = 2 \Rightarrow \text{rg } B = 3$

Es: Per quali valori di $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ la matrice A ha rango massimo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a & b \\ 0 & 4 & 5 & c & d \\ 0 & 6 & 7 & e & f \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice massimo è 3 perché ha solo 3 righe

$\text{rg } A = 3 \ \forall \ a, b, c, d, e, f$

∃ perché $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$

Geometria e combinatoria

XXV lezione
26/11/10

$R_3 \longrightarrow R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{2} & \frac{11}{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \frac{11}{2} R_2$

$R_1 \to R_1 + \frac{8}{19} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{2} & \frac{11}{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - \frac{6}{19} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{14}{19} & \frac{18}{19} & -\frac{6}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

$R_3 \to -\frac{2}{19} R_3$

$R_2 \to \frac{1}{2} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

I $\qquad$ A^{-1}

$A \cdot C = I$ (se è giusto)

Es 5: Calcolare il rango con la riduzione a gradini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 - R_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 3$

SPAZI VETTORIALI

DEFINIZIONE: V

$$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$$

prodotto esterno

1) proprietà commutativa
2) proprietà associativa di +
3) $\exists\, 0_V \in V$ elemento neutro rispetto alla somma
4) $\forall v \in V \ \exists -v \in V / v + (-v) = 0_V$
5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V : \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$
6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V : (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
8) $1 \cdot v = v \ \forall v \in V$

V spazio vettoriale reale. Gli elementi di V si dicono vettori, 0_V vettore nullo

Es: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, spazio dei vettori geometrici, $\mathbb{R}^n$

Definizione: V, spazio vettoriale reale

$v_1, \dots v_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ a coeff $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ il vettore $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in V$

Es: $(-1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$

$(-1, 2, 3) = -1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$

Il vettore $(-1, 2, 3)$ è combinazione lineare dei vettori $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ a coefficienti $-1, 2, 3$

Geometria e Combinatoria

~~XXV~~ lezione
26/11/10

$R_3 \longrightarrow R_3 - 5R_2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 17/3 & -1 & -16/3 \\ 0 & -17 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$R_3 \longrightarrow R_3 + 3R_2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 17/3 & -1 & -16/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sopra l'ultima riga può essere vegliata tutti zeri

~~XXVI~~ lezione
29/11/10

TEOREMA DEGLI ORLATI: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

ha rango $p \iff \exists$ un minore di ordine p non nullo e sono nulli tutti i minori di ordine $p+1$ orlando il minore di ordine p non nullo fissato

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

orlato del minore $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -3 & 9 & 10 \end{vmatrix}$

Es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

* non sono orlati

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Proposizione: $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti (linearm. dip) $\iff$ ~~vedete~~ ie determinante delle matrici che ci ha come righe come colonne e non nulli.

Es: $v_1=(1,-2,3)$, $v_2=(0,1,-2)$, $v_3=(1,1,1)$ $\quad \mathbb{R}^3$

$$\det\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix} = 1(1+3)+2(1+2) = 1 \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sono linearmente indip}$$

Es. $\mathbb{R}^3$ Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $v_1=(k,-2,1)$ $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,0,2)$ sono linearmente dipendenti?

$$\det\begin{pmatrix}k&1&1\\-2&1&0\\1&-2&2\end{pmatrix} = k(2)-(4)+1(3)$$

Proposizione: $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti $\iff$ ie rango della matrice che ci ha come righe o colonne è k

Es $\mathbb{R}^4$

$v_1=(1,-2,3,0)$, $v_2=(3,-1,0,2)$, $v_3=(1,1,1,1)$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\3&-1&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rid a gradini}} \begin{pmatrix}1&-2&3&0\\0&5&-9&2\\0&0&\frac{17}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$ i vettori sono linearmente indipendenti

Osservazione $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^4$. Se consideriamo la matrice A che ci ha come righe, $A \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$

$\operatorname{rg} A \leq 4 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ sono linearmente indipendenti

i vettori non sono lin. indip

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XXVI lezione 29/11/10

Es 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rg}A? \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & -1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} = -k + 1 + 1 - k + 2 - 2k^2 = -2k + 4 - 2k^2$$

$$= -2k^2 - 2k + 4 = -k^2 - k + 2 =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} = -k(1+k) + 2 - k = -k^2 - 2k + 2$$

$k^2 + k - 2 = 0$
$k^2 + k - 2 = 0$ $\quad -2, \ 1$

per $k \in \{-2, 1\}$ $\text{rg}A = 3$
perkè $k \in \{-2, 1\}$ $\text{rg}A = 2$

Es 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg}A? \quad A \in M_{N}(\mathbb{R})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad 2 \leq \text{rg} \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(1-k) = -k - 2 \Rightarrow \text{per } k \neq -2 \quad \text{rg}A = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = 1(+k) - 1(-k) + 2(+1) = 2k + 2 \Rightarrow \text{per } k \neq -1$$

$\text{rg}A = 3$

Es 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & a & 2a-1 \\ 0 & 1 & a & 2-a \end{pmatrix} \qquad 2 \leq \text{rg}A \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 2-a \end{vmatrix}$$

$-1(a-1)$ $\qquad -1(2a - 1 - a^2) = (a-1)^2$

$a = 1 \Rightarrow \text{rg}A = 2$
$a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}A = 3$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

RANGO DI UNA MATRICE

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

H sottomatrice di ordine K di A (deve essere quadrata)
bisogna prendere elementi della stessa riga

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

sottomatrice di ordine 2

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Minore di ordine K di A = è determinate di una sottomatrice di ordine K

Es: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 13 \end{vmatrix}$

Definizione: Si dice che A ha rango p e si scrive $rg\,A = p$ se $\exists$ un minore di ordine p non nullo e sono nulli tutti i minori di ordine superiore

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $rg\,A = 2$

Es: (!) è rango di una matrice è è numero di pivot ?

TEOREMA: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

allora: $rg\,A =$ è numero di pivot di una sua "ridotta" a gradini

Es: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 10 & 8 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -17 \neq 0 \Rightarrow 2 \leq rg\,A \leq 3$

$R_2 \to R_2 + \frac{2}{3} R_1$ $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 17/3 & -1 & -16/3 \\ 10 & 8 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

Geometria e combinatoria — XXVII lezione 30/11/10

Proposizione: $v_1, \dots, v_k \in V$ sono lin. dipendenti $\iff$ almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri

Dimostrazione ($\Rightarrow$)

$v_1, \dots, v_k$ lin dip $\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_k v_k = 0_V$ α_i non tutti nulli

$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_1^{-1} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} v_k$

Dimostrazione ($\Leftarrow$)

$v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k-1} v_{k-1} \Rightarrow 1 \cdot v_k - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_{k-1} v_{k-1} = 0_V$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ lin. dipendenti

Esempio: $\mathbb{R}^4$

$v_1 = (1,-2,0,3)$, $v_2 = (-2,4,0,-6)$, $v_3 = (1,1,1,1)$

$v_2 = -2 v_1$ $\quad v_2 + 2v_1 + 0 \cdot v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$(1,1,1,1) = \alpha(1,-2,0,3) + \beta(-2,4,0,-6)$?

$(1,1,1,1) = (\alpha - 2\beta, -2\alpha + 4\beta, 0, 3\alpha - 6\beta)$

$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta \\ 1 = -2\alpha + 4\beta \\ 1 = 0 \\ 1 = 3\alpha - 6\beta \end{cases}$ impossibile

$v_2 = -2 v_1 + 0 \cdot v_3$

$v_1 = -\frac{1}{2} v_2 + 0 \cdot v_3$

$v_3 \neq \alpha v_1 + \beta v_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Osservazione: 1) $0_V \notin B$ $\forall$ base B di V

2) V spazio vettoriale reale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Ogni vettore di V si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B

$x_1, \dots x_n$ sono coordinate o componenti del vettore v

$\forall v \in V$: $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$v_1, \dots v_n$ lin. indipendenti $\Leftarrow$ $(x_1 - y_1) v_1 + \dots + (x_n - y_n) v_n = 0_V$

3) $v_1, v_2 \in V$ v_1, v_2 lin. dipendenti $\iff$ sono proporzionali

v_1, v_2 lin. dip $\iff \exists \alpha v_1 + \beta v_2 = 0$

α e β non entrambi nulli $\iff (\alpha \neq 0)$ $v_1 = \frac{-\beta}{\alpha} v_2$

Proposizione: V spazio vettoriale reale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$w_1, \dots, w_m \in V$, $m > n$ Allora $w_1, \dots, w_m$ sono lin. dip

TEOREMA: V, spazio vettoriale reale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

allora ogni altra base di V ha n vettori

Dimostrazione: $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di V

B base $\Rightarrow m \leq n$

B' base $\Rightarrow n \leq m$

$\Rightarrow m = n$

Definizione: V, spazio vettoriale reale, $B = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

n = dimensione di V = $\dim V$

($\dim V$ = massimo numero di vettori linearmente indipendenti)

Osservazione: $\mathbb{R}^3$ $3 = \dim \mathbb{R}^3$

Osservazione: V sp. vettoriale reale, $\dim V = n$

$T = \{w_1, \dots, w_n\}$ lin. $\not$ indip.

T è una base di V?

Vogliamo dimostrare che:

$\forall v \in V$: $v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XXVII lezione 30/11/10

Es: V spazio dei vettori geometrici del piano

$\forall \overrightarrow{OP} \in V : \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Il vettore $\overrightarrow{OP}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ a coeffi. x e y

Definizione: V spazio vettoriale reale

$v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti se è unica loro combinazione lineare nulla è quella a coeffi. tutti nulli ovvero

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Es: $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (2,0)$, $v_2 = (-3,1)$

$\alpha(2,0) + \beta(-3,1) = (0,0) \Rightarrow (2\alpha - 3\beta, \beta) = (0,0)$

$\Rightarrow 2\alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow v_1$ e v_2 linearmente indipende

Es: $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (-1,2,0)$ $v_2 = (1,-2,3)$, $v_3 = (-1,2,3)$

$\alpha(-1,2,0) + \beta(1,-2,3) + \gamma(-1,2,3) = (0,0,0)$

$(-\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - 2\beta + 2\gamma, 3\beta + 3\gamma) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\gamma - 2\gamma = 0 \\ \alpha = -2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \forall \gamma \in \mathbb{R} \\ \alpha = -2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ non sono linearmente indipendenti e sono linearmente dipendenti

Definizione: $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti se $\exists$ una loro combinazione lineare nulla a coeffi, non tutti nulli ovvero:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$, α_i non tutti nulli

Calcolare al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & -2 & k \\ k & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} = 1(k^2-2) - 0 - 0 = k^2-2 = 0 \quad k \neq \pm\sqrt{2} \text{ si ha che } \operatorname{rg}A = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +2 + k(-3k) = -3k^2 + 2 \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ si ha che } \operatorname{rg}A = 3$$

quindi $\operatorname{rg}(A) = 3 \ \forall k$

Per quali $k \in \mathbb{R}$ i tre vettori di $\mathbb{R}^4$?

$v_1 = (0,1,k,0) \quad v_2 = (1,0,-2,k) \quad v_3 = (k,3,0,2)$

Non esistono valori di k per cui i vettori sono dip

3) Se u e v sono vettori di V dipendenti $w \in V$

u, v, w sono dipendenti

$u, v \in V$ indipendenti

$w \neq 0 \in V$ u, v, w sono ancora indipendenti?

NO ESEMPIO $w = u + v$

$w = \alpha u + \beta v$

4) $\{u, v, w\}$ in V indipendenti

$\{u, u+v, u+v+w\}$ sono indipendenti

$V = \mathbb{R}^3 \quad u = (1,0,0) \quad v = (0,1,0) \quad w = (0,0,1)$

Sono indipendenti

Dimostrazione: (per assurdo)

Siano $u, u+v, u+v+w$ dipendenti

$\exists \alpha, \beta, \gamma$ non tutti nulli $\mid \alpha u + \beta(u+v) + \gamma(u+v+w) = 0$

$= (\alpha+\beta+\gamma)u + (\beta+\gamma)v + \gamma w = 0$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

ASSURDO no supposto α, β, γ non tutti nulli

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

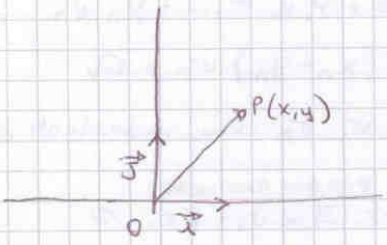
Geometria e Combinatoria — XXVIII lezione 1/12/10

Definizione: V, spazio vettoriale, reale

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sottoinsieme di V. B si dice base di V se: 1) i vettori di B sono linearmente indipendenti

2) $\forall v \in V: v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $x_i \in \mathbb{R}$ (B genera V)

Es $V = \{$vettori geometrici del piano$\}$



1) $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$

2) $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono linearmente indipendenti

$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ base di V

Es $\mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$B = \{v_1, v_2\}$ base di $\mathbb{R}^2$ poiché

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow v_1$ e v_2 sono linearmente indipendenti

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1)$

$B = \{(1,0), (0,1)\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

Es: $B' = \{(2,-1), (3,3)\}$ base di $\mathbb{R}^2$

1) $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 9 \Rightarrow$ i vettori di B' sono lin. indip.

2) $\forall (x,y) = \alpha(2,-1) + \beta(3,3) = \begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6\beta - 2y + 3\beta \\ \alpha = 3\beta - y \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{x+2y}{9} \\ \alpha = \dfrac{x-y}{3} \end{cases}$

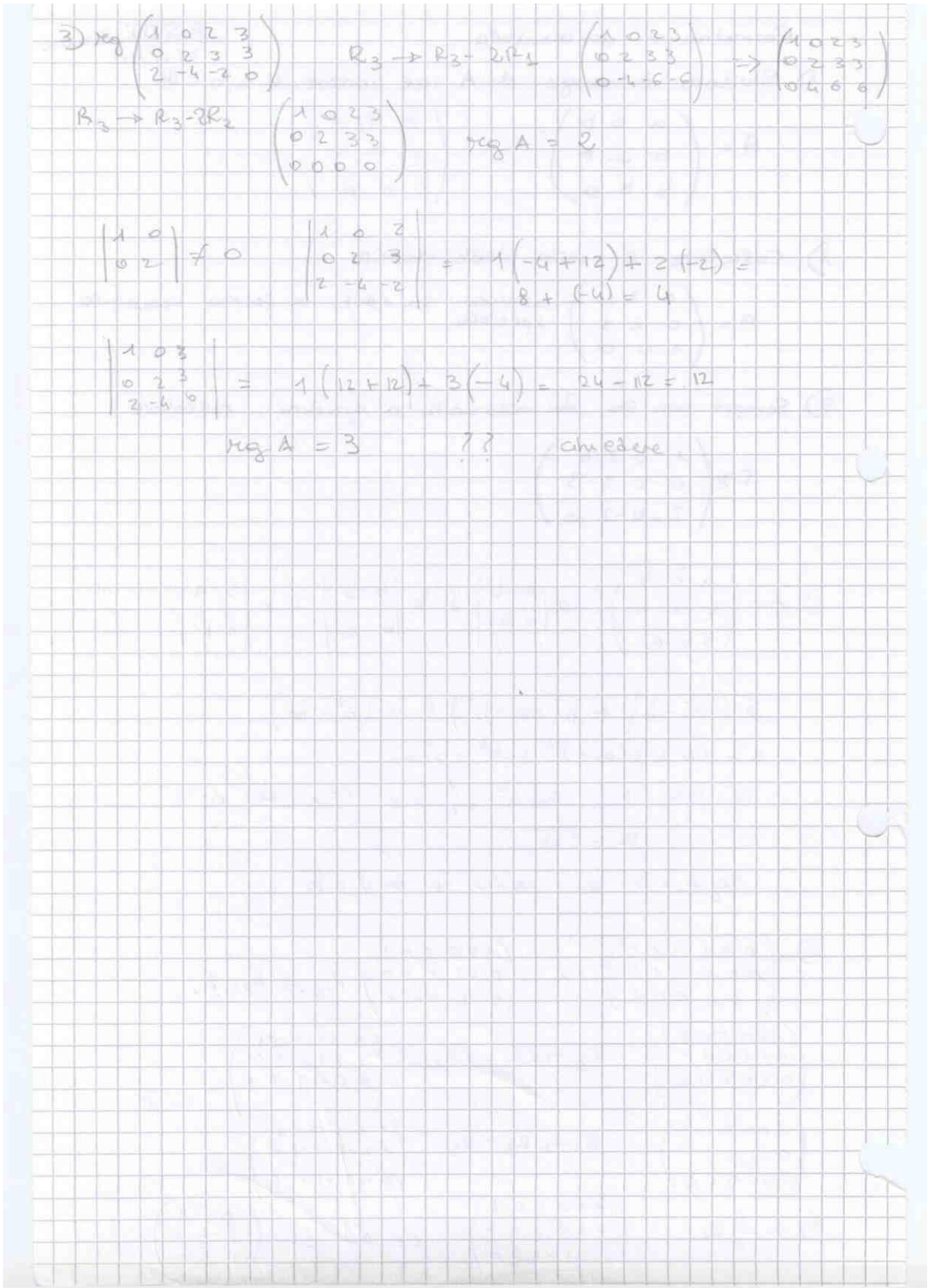
$(x,y) = \dfrac{x-y}{3} \cdot (2,-1) + \dfrac{x+2y}{9} \cdot (3,3)$

rivedere e se mai chiudere la faccenda

$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

Es: Base per $M_2(\mathbb{R})$ (casa)

$\forall \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$


3) rg
$R_3 \to R_3 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 - 3R_2$
rg A = 2
$\neq 0$
$= 1(-4+12) + 2(-2) =$
$8 + (-4) = 4$
$= 1(12+12) + 3(-4) = 24 - 12 = 12$
rg A = 3
??
chiedere

Geometria e combinatoria — XXVIII Lezione 3/12/10

Dimostrazione: $v, w_1, \dots, w_n$ lin. dip $\Rightarrow \alpha v + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n = 0_V$, coeff non tutti nulli

$\alpha = 0$? NO $\Rightarrow \alpha \neq 0$: $v = -\frac{\beta}{\alpha} w_1 - \frac{\beta_2}{\alpha} w_n$

$\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n = 0_V$ coeff non tutti nulli, assurdo

$\Rightarrow T$ genera V

ESERCIZI:

1) Per quali $K \in \mathbb{R}$ A è invertibile, scelto un opportuno valore di K calcolare A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ K & 2 & 1 \\ 1 & K & K \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ K & 2 & 1 \\ 1 & K & K \end{vmatrix} = -3((K^2) - 1) + 1(K^2 - 2) = -3K^2 + 3 + K^2 - 2 = -2K^2 + 1 =$$

per $K \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\det A = -3(-1) + 1(-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$A_{11} = 0 \quad A_{12} = +1 \quad A_{13} = -2$

$A_{21} = 0 \quad A_{22} = -1 \quad A_{23} = +3$

$A_{31} = 1 \quad A_{32} = 0 \quad A_{33} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & +3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Es 2: Calcolare il $\operatorname{rg} A$, al variare di $K \in \mathbb{R}$

$\operatorname{rg}(A) = 3 \quad K \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{rg}(A) = 2 \quad K = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Es 3: Per quali K i vettori sono dipendenti

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$0 + 3 - 2 = 1$

$0 + 2 - 2 = 0$

$0 - 2 + 3 = 1$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

TEOREMA di Rouchè - Capelli:

Le sistema $AX = B$ di m equazioni in n incognite è compatibile $\Leftrightarrow$ le rango della matrice incompleta è uguale ae rango della matrice completa ovvero $\text{rg}\, A = \text{rg}\, C$

Dimostrazione

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B$$

Le sistema è compatibile $\Leftrightarrow \exists (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ soluzione $\Leftrightarrow (b_1, \dots, b_m)$ è combinazione lineare a coeff $\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n$ dei vettori $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn}) \Leftrightarrow$ i vettori $(b_1, \dots, b_m), (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \bar{x}_1 A_1 + \dots + \bar{x}_n A_n = B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \text{rg}\, A = \text{rg}\, C$

Es: Vedere se è compatibile

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x - 7y + 8z = 3 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ * matrice incompleta

$\det A = -6 - 2(-8) - 1(10) = 0$

$\text{rg}\, A = 2$ poiché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \Rightarrow \text{rg}\, C = 2$$

Le sistema è compatibile

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x - 7y + 8z = 3 \end{cases}$$

questo sistema avrà infinite soluzioni

*

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XXVIII lezione 3/12/10

1) Studiare il rango di A al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

2) Calcolare l'inverso della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ usando la rid. a forma canonica speciale

3) Sempre con la di riduzione a gradini, calcolare

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ $\quad a\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & a \\ b & b \end{vmatrix}$

$a(a^2 - b) + b(ba - b^2) + b(b^2 - ba)$

$a^3 - ab + b^2a - b^3 + b^3 - b^2a$

$a^3 - ab \Rightarrow \quad a(a^2 - b) = 0 \iff a = 0$

$a = \pm\sqrt{b}$

$rg\, A = 3$ se $a \neq 0$ e $a \neq \pm\sqrt{b}$

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad R_3 \to R_3 - R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad R_3 \to 2R_3 - R_2$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad R_2 \to R_2 - R_3$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad C = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

TEOREMA di Cramer: $AX = B$ sistema quadrato in n incognite

allora il sistema è ~~compatibile~~ ammette una sola soluzione

$\iff \det A \neq 0$

Risulta $\overline{x_1} = \frac{\det \overline{A}}{\det A}, \dots, \overline{x_n} = \frac{\det \overline{A_n}}{\det A}$

dove $\overline{A_i}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti

Dimostrazione: $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$A\overline{X} = B \Rightarrow \overline{X} = A^{-1} \cdot B$

Es:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Per quali valori di k ammette una sola soluzione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \det A \neq 0$$

$1(2-k) - 2(-2-2k) - 1(1+2) =$
$2 - k + 4 + 4k - 3 = 3k + 3$ per $k \neq -1$ 1 soluz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$k = 0 \Rightarrow \det A = 3$

$$\overline{x_1} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{3}, \quad \overline{x_2} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}}{3}, \quad \overline{x_3} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{3}$$

Es:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$\det A = 0 \quad rg A = rg C = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

perché $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

~~XXIX~~ aula
06/12/10

Geometria e combinatoria

Definizione: sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matrice dei coefficienti **matrice incompleta**

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ matrice dei coeff e termini noti o **matrice completa**

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad AX = B$$

Definizione: Soluzione del sistema

Si dice che un $ENNUPLA = (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema se soddisfa tutte le soluzioni del sistema

Definizione: un sistema si dice **quadrato** quando il numero delle equazione è uguale al numero delle incognite

Definizione: un sistema **omogeneo** si dice quando i termini noti sono nulli $(AX = 0)$

Definizione: Un sistema **compatibile** si dice quando ammette soluzioni, mentre quando non ammette soluzioni si dice **incompatibile**

Osservazione: $AX = 0$ "sistema omogeneo" è sempre compatibile, poiché ammette sempre almeno la soluzione nulle le eventuali soluzioni non nulle si dicono **autosoluzioni**

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ -y-5z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1-2z \\ -y=-2+5z \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2z+5z=3z-1 \\ y=2-5z \end{cases}$$

Es:

$$\begin{cases} (3k-1)x=1 \\ -2x+y+kz=2 \\ 3x+ky+3z-3w=-3 \\ x+2y-kw=0 \end{cases}$$

1) discutere la compatibilità del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$
2) fissato un valore di k risolvere il sistema

matrice incompleta

$$A=\begin{pmatrix} 3k-1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & k & 0 \\ 3 & k & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -k \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3k-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & k & 0 & 2 \\ 3 & k & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

matrice completa

$$\det A = (3k-1)\left(1\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -k \end{vmatrix}\right) =$$

$$1\left(-3k+0\right)-k\left(-k^2+6\right)=\left(-3k-k^3-6k\right)(3k-1)=$$

non sviluppare non serve

$$=-9k^2-3k^4-18k^2+3k+k^3+6k=-3k^4+k^3-27k^2+9k$$

$$(3k-1)\left(k^3-9k\right)=(3k-1)\left(k\left(k^2-9\right)\right) \qquad k=0,\ k=\pm 3,\ k=1/3$$

$$k \notin \left\{0,-3,+3,1/3\right\} \Rightarrow \operatorname{rg} A=4=\operatorname{rg} C$$

poiché è una sottomatrice

Compatibile con una sola soluzione

$\operatorname{rg} A=3$ minore di 3 diverso da zero

per $k=0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria è combinatoria

~~XXIX~~ lezione
6/12/10

Proposizione: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ allora

1) $\text{rg}\, A$ = massimo ordine di un minore non nullo
2) $\text{rg}\, A$ = numero dei pivot di una matrice a gradini equivalente per righe ad A
3) $\text{rg}\, A$ = massimo numero di colonne lin. indip
4) $\text{rg}\, A$ = massimo numero di righe lin. indip.

$$\text{*} \begin{cases} x + 7y = z \\ 4x - 7y = 3 - 8z \end{cases} \Rightarrow$$ infinite soluzioni

Studiamo quindi di un sistema quadrato

(1) se ie rango è due ie numero di righe indipendenti è due

Es.:

$$\begin{cases} (4-K)x - 4z = K \\ (1-K)y + z = 1 \\ 4x + (1-K)z = 1-K \end{cases}$$

Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ è compatibile ie sistema?

$$A = \begin{pmatrix} 4-K & 0 & -4 \\ 0 & 1-K & 1 \\ 4 & 0 & 1-K \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4-K & 0 & -4 & K \\ 0 & 1-K & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1-K & 1-K \end{pmatrix}$$

$$\det A = (4-K)(1-K)^2 - 16(1-K) = (1-K)\left((4-K)(1-K) + 16\right) =$$

$$= (1-K)(K^2 - 5K + 20)$$

$$K = 1, \quad K = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 80}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(-4-1) = -20$$

$\text{rg}\, A = 3$ per $K \neq 1$

$\text{rg}\, A = 2$ per $K = 1$ poiché $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

per $K \neq 1 \Rightarrow \text{rg}\, A = 3 = \text{rg}\, C \Rightarrow$ sistema compatibile

per $K = 1$ $\text{rg}\, A = 2 \neq 3 = \text{rg}\, C \Rightarrow$ sistema incompatibile

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Es 1:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + y + az = 1 \\ ax + (4-a)y + az = 1 \end{cases}$$

per quali valori di a ammette una sola soluzione

Es 2:

$$\begin{cases} x + (a^2-1)y = a-1 \\ ay + t = 1 \\ (a^2-1)y - z = a-1 \\ (a^2+a-1)y + z + t = a \end{cases}$$

per quali valori di a il sistema ammette infinite soluzioni

Es 3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

risolvere col metodo di eliminazione di Gauss

Es 4

Un sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite può ammettere una sola soluzione?

Osservazioni: (enocle)

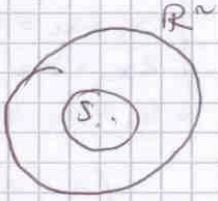
$AX = 0 \qquad S = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) / A \cdot \bar{X} = 0\} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in S$

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in S$

$\alpha \in \mathbb{R}, (\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \in S$

$\alpha (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in S$



S spazio vettoriale reale sottospazio

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria

~~XXIX~~ lezione
6/12/10

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 \\ 7x_1 + 4x_2 = 3 - 5x_3 \end{cases}$ ora possiamo applicare Cramer poiché $\det A \neq 0$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ $12 - 14 = -2 \Rightarrow \neq 0$

$x_1' = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3-5x & 4 \end{pmatrix}}{-2} = \dfrac{4 - 4x - (6 - 10x)}{-2} = \dfrac{4 - 4x - 6 + 10x}{-2} = \dfrac{-2 + 6x}{-2} = 1 - 3x$

$x_2'' = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1-x \\ 7 & 3-5x \end{pmatrix}}{-2} = \dfrac{9 - 15x - (7 - 7x)}{-2} = \dfrac{9 - 15x - 7 + 7x}{-2} = \dfrac{2 - 8x}{-2} = -1 + 4x$

Osservazione: n = numero delle incognite

1) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C = n \Rightarrow$ il sistema ammette una sola soluzione
$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C = p < n \Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da $n-p$ parametri (∞^{n-p} soluzioni)

2) $AX = 0$ quadrata ammette autosoluzioni $\Leftrightarrow \det A = 0$

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

Definizioni: due sistemi si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni

Es:

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 - 4R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 - R_2$

Es 3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 5 & 10 & -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to R_4 - 5R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } C = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rg } A = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$$ infinite soluzioni dipendenti da x_1, x_2

Es 4: Un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in 5 incognite può ammettere una sola soluzione?

No perché $\text{rg } A = \text{rg } C$ perché il sistema ha infinite soluzioni

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria

~~XXX~~ Scritto
7/1/12/10

per $k=0$ $\quad rg\,A = 3 \quad rg\,C = -9$

per $k=3 \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 2R_4$
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

continuare a caso.

Risolvere il sistema per $k=1$ con Cramer

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ -2x+y+z = 2 \\ 3x+y+3z-3w = -3 \\ x+2y-w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Risolvere il seguente sistema (a gradini)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad R_2 \to 2R_1 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sistema incompatibile poiché $0 = 2$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y,z) \in S \Rightarrow x-2y+z=0 \Rightarrow \alpha x - 2\alpha y + \alpha z = 0$

$\Rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha (x,y,z) \in S$

$\dim S < 3$

$x = 2y - z \qquad S = \{(2y-z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$

① visto che i parametri sono 2 $\dim S = 2$
considerare la base canonica

$y = 1, z = 0 \Rightarrow (2,1,0) \in S$

$y = 0, z = 1 \Rightarrow (-1,0,1) \in S$

$B = \{(2,1,0), (-1,0,1)\}$ base di S

1) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ sono linearmente indipendenti

2) B genera S poiché

$\forall (2y-z, y, z) \in S : (2y-z, y, z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$

$= (2y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$

trovare $v_3 \in \mathbb{R}^3 / B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$v_3 \neq \underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{\in S} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad v_3 = (1,0,0) \in S$

Proposizione: S, T sottospazi di V allora:
$S \cap T$ è un sottospazio di V

Dimostrazione: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in S \cap T \Rightarrow$
$v, w \in S$ e $v, w \in T \Rightarrow \alpha v + \beta w \in S$ e
$\alpha v + \beta w \in T \Rightarrow \alpha v + \beta w \in S \cap T$

Osservazione: $S = \{(x,y,z) / x - 2y + z = 0\}$
$T = \{(x,y,z) / 3x - z = 0\}$

Geometria e combinatoria — XXX lezione 7/12/10

Es1: per quali valori di a, ammette una soluzione unica

$$\begin{cases} x-y+z=a \\ x+y+az=1 \\ ax+(4-a)y+az=1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 4-a & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 4-a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 4-a & a \end{vmatrix} = 1\left(a-(a(4-a))\right)+1\left(a-a^2\right)+1\left(4-a\right)-a$$

$$= -3a+a^2+a-a^2+4-2a$$

$$= -4a+4 \Rightarrow \text{per } a \neq 1 \text{ si ha che ammette una sola soluzione}$$

Es2: per quali valori di a il sistema ammette infinite soluzioni

$$\begin{cases} x+(a^2-1)y=a-1 \\ ay+t=1 \\ (a^2-1)y-z=a-1 \\ (a^2+a-1)y+z+t=a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & a^2-1 & -1 & 0 \\ 0 & a^2+a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & -1 & 0 & a-1 \\ 0 & a^2+a-1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & a^2-1 & -1 & 0 \\ 0 & a^2+a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2-1 & -1 & 0 \\ a^2+a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (a^2-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1\left[a(-1)+1\left((a^2-1)+a^2+a-1\right)\right]-(a^2-1)\left[0\right]$$

$$-a+2a^2+a-2 = 2a^2-2 \Rightarrow = 0 \iff a = \pm 1$$

per $a \neq 1$ il sistema ammette infinite soluzioni

Dimostrazione 2) $\forall v \in S \Rightarrow v = v + 0_V \in S+T \Rightarrow S \subseteq S+T$ ($0_V \in T$)

$\forall t \in T \Rightarrow t = 0_V + t \in S+T \Rightarrow T \subseteq S+T$ ($0_V \in S$)

$S \cup T \subseteq S+T$

Dimostrazione 3) Se U è un sottospazio / $S \cup T \subseteq U$ allora $S+T \subseteq U$

$\forall v+t \in S+T \Rightarrow v+t \in U$ ($v \in S \subseteq U$, $t \in T \subseteq U$)

Definizione 1: $S+T$ sottospazio somma

Definizione 2: $S+T$ somma diretta se $S \cap T = \{0_V\}$

Definizione 3: $V = S+T$ Se T supplementare di S

Es: $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z) / 2x-y=0\} = \{(x,2x,z) / x,z \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \{(x,y,z) / x-2y+z=0\} = \{(2y-z,y,z) / y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,y,z) \in S \cap T \iff \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x \\ x-4x+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases}$$

$$S \cap T = \{(x,2x,3x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$x=0$ e $z=1$ poi $x=1$ e $z=0$

Base di $S = \{(1,2,0),(0,0,1)\}$

$B_T = \{(2,1,0),(-1,0,1)\}$

$\forall s+t \in S+T$

$$v + t = \alpha(1,2,0) + \beta(0,0,1) + \alpha'(2,1,0) + \beta'(-1,0,1)$$

($v \in S$, $t \in T$; $\alpha(1,2,0)+\beta(0,0,1) = s$, $\alpha'(2,1,0)+\beta'(-1,0,1) = t$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad B_{S+T} = \{(1,2,0),(0,0,1),(2,1,0)\}$$

$S+T = \mathbb{R}^3$

$\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S+T)$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

XXXI lezione
9/12/10

Geometria e combinatoria

Definizione: V spazio vettoriale reale. S sottoinsieme non vuoto di V. S si dice sottospazio di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V

$$+ : S \times S \longrightarrow S, \quad (v, w) \longmapsto v+w$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S, \quad (\alpha, v) \longmapsto \alpha v$$



Proposizione: S è un sottospazio di $V \iff$
1) $\forall v, w \in S : v+w \in S$;
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in S : \alpha v \in S$

Proposizione: S è un sottospazio di $V \iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in S : \alpha v + \beta w \in S$

Osservazione:
1) $\forall v \in S \Rightarrow -v \in S$
2) $\forall v, -v \in S \Rightarrow v + (-v) = 0_v \in S$

Es: $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; x - 3y + z = -2\}$
non è un sottospazio $(0,0,0) \notin T \Rightarrow T$ non è un sottospazio

Es: $\mathbb{R}^3$
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; x - 2y + z = 0\}$ verificare che S è un sottospazio. Determinare una base per S. Estendere B ad una base di $\mathbb{R}^3$

a) $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in S \Rightarrow x - 2y + z = 0, \quad x' - 2y' + z' = 0$

$x - 2y + z + x' - 2y' + z' = 0 \Rightarrow x + x' - 2(y+y') + z + z' = 0$

$(x+x', y+y', z+z') \in S \Rightarrow (x,y,z) + (x',y',z') \in S$

$$-\sum_{j=i+1}^{k} \beta_j \vec{v}_j = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_i v_i$$

$S \cap T$

$$\sum_{j=i+1}^{k} \beta_j \vec{v}_j + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_i v_i = 0_V$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{h} \alpha_j v_j = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_h = 0$$

Es:

$\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S+T) = 3$

$\mathbb{R}^3 = S+T$ non è somma diretta

S e T non supplementari

Es: $S = \{(x, 2x, z) / x, z \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{y - 2x = 0}$

$\nexists$ T sottospazio supplementare di S ?

(ovvero $S \cap T = \{0_V\}$, $S + T = \mathbb{R}^3$) =

$= \mathbb{R}^3 = S + U$

$B_S = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ base di S (v_1, v_2)

$v_3 = (0, 1, 0) \notin S$

$B = \{(1,2,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$U = \langle \{(0,1,0)\} \rangle$ sottospazio generato da $\{(0,1,0)\}$

$= \{\alpha((0,1,0)\}$ insieme delle combinazioni lineari

$S + U = \mathbb{R}^3$ $\quad S \cap U = \{(0,0,0)\}$

poichè i tre vettori sono lin. indipendenti

Geometria e combinatoria

XXXI lezione 9/12/10

$S \cap T = \{(x,y,z) \,/\, x-2y+z=0,\ 3x-z=0\}$

$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y+3x=0 \\ z=3x \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases}$

$S \cap T = \{(x,2x,3x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$S \cup T$ sottospazio? NO

$(2,1,0) \in S \Rightarrow (2,1,0) \in S \cup T$

$(1,0,3) \in T \Rightarrow (1,0,3) \in S \cup T$

$\underbrace{(2,1,0)+(1,0,3)}_{S \cup T \notin} = (3,1,3)$ non appartiene ad S, $\notin T$

Osservazione

S, T sottospazi $/\ S \not\subseteq T,\ T \not\subseteq S \Rightarrow \exists\, v \in T,\ v \notin S,\ \exists\, w \in S,\ w \notin T$

$\Rightarrow v+w \in S$? No

$\Rightarrow v+w = p \in S \Rightarrow v = p-w \in S$ assurdo



W è il più piccolo sottospazio di V contenente $S \cup T$ $\quad S \cup T \subseteq W$ ($\nexists\, U$ sottospazio di V $S \cup T \subseteq U \subseteq W$)

Proposizione: Se S e T sottospazi di V allora

1) $S+T = \{p+t \,/\, p \in S, t \in T\}$ è un sottospazio di V
2) $S \cup T \subseteq S+T$
3) $S+T$ è ie più piccolo sottospazio contenente $S \cup T$

Dimostrazione 1) $\forall\, p+t,\ p'+t' \in S+T \Rightarrow p+t+p'+t' = \underbrace{p+p'}_{\in S} + \underbrace{t+t'}_{\in T} \in S+T$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, p+t \in S+T \Rightarrow \alpha(p+t) = \underbrace{\alpha p}_{\in S} + \underbrace{\alpha t}_{\in T} \in S+T$

Proposizione

$f: V \longrightarrow V'$ applicazione lineare

allora Imf è un sottospazio di V'

Dimostrazione: $\forall v', w' \in Imf \Rightarrow v'+w' \in Imf$?

$v', w' \in Imf \Rightarrow \exists\ v, w \in V \ / \ f(v)=v',\ f(w)=w'$

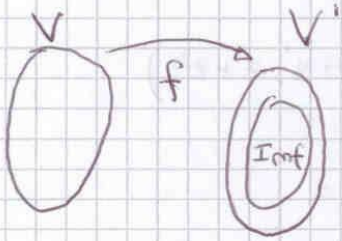
$\Rightarrow v'+w' = f(v)+f(w)$ dalla def di app. lineare

$= f(v+w) \in Imf$

Dimostrazione: $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall v' \in Imf \Rightarrow \alpha v' \in Imf$?

$v' \in Imf \Rightarrow \exists v \in V \ / \ f(v)=v' \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha v' = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in Imf$ è un sottospazio



Osservazione

1) $f(0_v) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_v$
2) $f(-v) = f(-1 \cdot v) = -1 \cdot f(v) = -f(v)$

Es: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f((x,y,z)) = (x+3y,\ x-z)$

$f((0,0,0)) = (0,0)$

$\exists\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f((x,y,z)) = (x+3y,\ x-z) = (0,0)$?

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z+3y=0 \\ x=z \end{cases} \quad \begin{cases} z=-3y \\ x=-3y \end{cases}$$

$(-3y, y, -3y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f((-3y, y, -3y)) = (0,0)$

$\forall y \in \mathbb{R}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

~~XXX~~ Lezione 9/12/10

Geometria e combinatoria

TEOREMA di Grassmann

V. sp. vettoriale reale
S sottospazio, $\dim S = h$
T sottospazio, $\dim T = k$
$S \cap T$ sottospazio, $\dim(S \cap T) = i$
$S+T$ sottospazio, $\dim(S+T) = c$

allora

$$\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S+T)$$

$$\boxed{c = h + k - i}$$ RELAZIONE DI GRASSMANN

Dimostrazione

$B_{S\cap T} = \{v_1, \dots, v_i\}$

$S \cap T \subseteq S$
$S \cap T \subseteq T$ $\Rightarrow S \cap T$ sottospazio di S e T

$B_S = \{v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_h\}$

$B_T = \{v_1, \dots, v_i, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_k\}$

Vogliamo dimostrare che

$$B_{S+T} = \{v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, \bar{v}_{i+1}, \dots \bar{v}_k\}$$

$c = \dim(S+T) = h+k-i$ $\Rightarrow$ base di $S+T$

1) B_{S+T} genera $S+T$

$\forall v+t \in S+T \Rightarrow v+t = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_h v_h$ $\Rightarrow$ (appartenenza a S)
$+ \beta_1 v_1 + \dots + \beta_i v_i + \beta_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \beta_k \bar{v}_k =$
$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_i + \beta_i) v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_h v_h +$
$+ \beta_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \beta_k \bar{v}_k$

2) I vettori di B_{S+T} sono linearmente indipendenti

$$\sum_{j=1}^{h} \alpha_j v_j + \sum_{j=i+1}^{k} \beta_j \bar{v}_j = 0_V$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{h} \alpha_j v_j = -\sum_{j=i+1}^{k} \beta_j \bar{v}_j$$

$\in S$ $\quad$ $\in T$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ coordinate o componenti di V

$f: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$v \longmapsto (x_1, x_2, x_3)$

(!) ie vettore in una base è unico

$\ker f$? $\qquad w = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$

$w \in \ker f \iff f(w) = (y_1, y_2, y_3) = (0,0,0)$

$\iff w = 0_V \iff \ker f = \{0_V\}$

$\iff f$ iniettiva

$\operatorname{Im} f$?

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ \exists\, z \in V / f(z) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$z = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \in V$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

isomorfismo

Teorema:

V sp. vettoriale reale $\quad \dim V = n$

allora:

V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Es:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f((x,y,z)) = (x+3y, x-z)$

$\ker f = \{(-3y, y, -3y) / y \in \mathbb{R}\}$

$\dim \ker f = 1 \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$

dimo. che è suriettiva

$\operatorname{Im} f$ è sur $\iff \operatorname{im} f = V'$ (⟸)

Osservazione

$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$

$1 + 2 = 3$

Proposizione:

$f: V \to V'$ lineare

Allora:

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

XXXII Lezione
10/01/11

Geometria e Combinatoria

TRASFORMAZIONI LINEARI

Definizione: V, V' spazi vettoriali reali

$f: V \longrightarrow V'$ applicazione lineare
(trasformazione lineare)
(omomorfismo di spazi vettoriali)

se: soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\forall v, w \in V : f(v+w) = f(v) + f(w)$
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V : f(\alpha v) = \alpha f(v)$

Es: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f((x,y,z)) = (x+3y, x-z)$

1) $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)+(x',y',z')) = f((x+x', y+y', z+z'))$

$= (x+x'+3y+3y', x+x'-z-z') =$

$= (x+3y, x-z) + (x'+3y', x'-z') =$

$= f((x,y,z)) + f((x',y',z'))$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$f(\alpha(x,y,z)) = f((\alpha x, \alpha y, \alpha z)) =$

$= (\alpha x + 3\alpha y, \alpha x - \alpha z) = \alpha(x+3y, x-z) = \alpha f((x,y,z))$

METODO ALTERNATIVO DI VERIFICA

$f: V \to V'$ è lineare $\iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$:

$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$

Definizione: $f: V \to V'$ applicazione lineare biettiva isomorfismo

Definizione (dominio e codominio sono uguali)

$f: V \to V$ applicazione lineare endomorfismo

Definizione: $f: V \to V$ applicazione lineare biettiva

automorfismo

un applicazione lineare non conserva l'indipendenza se non in ~~una~~ a sotto una particolare ipotesi

Proposizione:

$f: V \to V'$ lineare iniettiva $v_1, \dots, v_k \in V$ lin. indip $\Rightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_k) \in V'$ lin. indip.

Dimostrazione

$\beta_1 f(v_1) + \dots + \beta_k f(v_k) = 0_V \Rightarrow f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k) = 0_V$

$\Rightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = 0_V$

$\beta_1 = \dots = \beta_k = 0 \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_k)$ lin. indipendenti

Osservazione

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo iniettivo

$\Rightarrow f$ suriettivo

$\dim \mathrm{Im} f = \dim V - \dim \ker f \Rightarrow \dim V \Rightarrow f$ suriettivo

Osservazione

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo suriettivo

$\Rightarrow f$ iniettivo

$\dim \ker f = \dim V - \dim \mathrm{Im} f = 0 \Rightarrow f$ iniettiva

Teorema

V, V' spazi vettoriali reali

$\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$w_1, \dots, w_n \in V'$

allora $\exists!\ f: V \longrightarrow V'$ lineare $/\ f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$

Dimostrazione:

$f: V \longrightarrow V'$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$f(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$

dimostrare che f è lineare e unica

Es

$f: V \to V'$ isomorfismo ← Rispiegare

$\dim V = n$

$\Rightarrow \dim V' = n \quad \Rightarrow \dim \ker f, \ \mathrm{Im} f = V' \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V' = n$

Es:

$f: V \to V'$ lineare biettiva

$f^{-1}: V' \to V$ lineare

verifichare che se $\exists$ l'inversa di una applicazione lineare quest'ultima è lineare

Es 2

$f: V \to W \qquad g: W \to V$ lineari

$g \circ f : V \to V'$ lineare ?

Es 3

$\dim V = \dim V' = n$

V e V' sono isomorfi ?

Es

$\dim V = n \qquad B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

V è isomorfo a $\mathbb{R}^n \qquad v = xv_1 + \dots + x_n v_n$

$f: V \to \mathbb{R}^n$

$f(v) = (x_1, \dots, x_n)$

XXXIII lezione
11/01/11

Geometria e Combinatoria

Osservazione:

$f: V \longrightarrow V'$ lineare

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$f(v_1), \dots, f(v_n)$

$\forall v' \in Imf \Rightarrow \exists v \in V \ / \ f(v) = v'$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$v' = f(v) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)$

$\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ genera Imf

Es: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (TROVARE BASE PER Imf)

$f((x,y,z)) = (x+3y, x-z)$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canonica di $\mathbb{R}$

$f((1,0,0)) = (1,1)$

$f((0,1,0)) = (3,0)$

$f((0,0,1)) = (0,-1)$

$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$B' = \{(1,1), (3,0)\}$ base di Imf

Come si comporta la trasformazione lineare in confronto alla dipendenza/indipendenza

Proposizione:

$f: V \longrightarrow V'$ lineare

$v_1, \dots, v_k \in V$ lin. dip $\Rightarrow$

$f(v_1), \dots, f(v_k) \in V'$ linearmente dipendenti

Dimostrazione:

$v_1, \dots v_k$ lin. dip $\Rightarrow \exists \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ con

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli $\Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0_V$

$\Rightarrow \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) = 0_{V'}$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli $\Rightarrow f(v_1), \dots f(v_k)$ lin. dip

4) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad k=0$

$f((x,y,z)) = (x+4z,\ z,\ x+y+5z)$

$f^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x',y',z') \longmapsto (x,y,z) \ / \ f((x,y,z)) = (x',y',z')$

$$\begin{cases} x+4z = x' \\ z = y' \\ x+y+5z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'+4z \\ z = y' \\ x = z' + y - 5z \end{cases}$$

Le incognite del sistema sono x, y, z

$$\begin{cases} x = x'+4y' \\ z = y' \\ x'+4y' = z' - 5y' - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'+4y' \\ z = y' \\ y = -9y' - x' + z' \end{cases}$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

XXXIII lezione
11/01/11

Geometria e Combinatoria

Es. 1

$\exists f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ /

$f((1,1,-2)) = (1,-2)$

$f((0,0,1)) = (0,1)$

$f((3,-1,2)) = (1,4)$?

Esistono e quante sono le applicazioni lineari?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1(-4) \neq 0$$ base

per le teorema precedente $\exists$ ed è unica l'applicazione

Es. 2

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$g((1,0,1)) = (2,-3)$

$g((1,1,1)) = (1,1)$

$g((-1,1,-1)) = (0,2)$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 \neq 0 = 0$$

non è una base quindi non esistono applicazioni lineari

Es. 3

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$h((1,-1,0)) = (1,2)$

$h((0,3,-2)) = (-2,0)$

infiniti vettori $\Rightarrow$ infinite funzioni lineare

β per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$

Es:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y)) = (x+3y, -2y, 3x+y)$

B, B' basi canoniche

$f((1,0)) = (1,0,3)$

$f((0,1)) = (3,-2,1)$

$$A_f^{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f((x,y,z)) = (x+4y, -3x+z)$

B base canonica di $\mathbb{R}^3$

$B' = \{(1,1), (-2,0)\}$ base di $\mathbb{R}^2$

$A_f^{BB'}$

$f((1,0,0)) = (1,-3) = \alpha(1,1) + \beta(-2,0)$

$f((0,1,0)) = (4,0) = \alpha'(1,1) + \beta'(-2,0)$

$f((0,0,1)) = (0,1) = \alpha''(1,1) + \beta'(-2,0)$

$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta \\ -3 = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = \alpha' - 2\beta' \\ 0 = \alpha' \end{cases} \quad \begin{cases} \beta' = -2 \\ \alpha' = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = \alpha'' - 2\beta'' \\ 1 = \alpha'' \end{cases} \quad \begin{cases} \beta'' = \frac{1}{2} \\ \alpha'' = 1 \end{cases}$

$$A_f^{BB'} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se $\overline{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$A^{B\overline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

XXXIII Lezione 11/01/11

Geometria e Combinatoria

Es (esonero)

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad k \in \mathbb{R}$

$f((x,y,z)) = (x+4z,\ ky+(k+1)z,\ x+(k+1)y+(k+5)z)$

1) Per $k=1$ verificare che è endo

2) Determinare al variare di k in $\mathbb{R}$, $\mathrm{Im}f$ e $\ker f$

3) Esistono valori di k per i quali f è un automorfismo?

4) Fissato un valore di k det f^{-1}

1) $f((x,y,z)) = (x+4z,\ y+2z,\ x+2y+6z)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha(x+4z, y+2z, x+2y+6z) + \beta(x+4z, y+2z, x+2y+6z)$

$= (\alpha(x+4z)+\beta(x+4z),\ \alpha(y+2z)+\beta(y+2z),\ \alpha(x+2y+6z)+\beta(x+2y+6z))$

2) $f((1,0,0)) = (1,0,1)$

$f((0,1,0)) = (0,k,k+1)$

$f((0,0,1)) = (4,k+1,k+5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & k+1 \\ 4 & k+1 & k+5 \end{vmatrix} = k^2+5k-k^2-k-k-1+4(-k) = -k-1$$

per $k \neq -1$ $\dim \mathrm{Im}f = 3$

per $k = -1$ $\dim \mathrm{Im}f = 2$

$\bar{B} = \{(1,0,1), (0,-1,0)\}$ Base di $\mathrm{Im}f$

per $k \neq -1 \Rightarrow \ker f = \{0_V\}$

per $k = -1 \Rightarrow \dim \ker f = 1$

$$\begin{cases} x+4z=0 \\ -y=0 \\ x+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ker f = \{(-4z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{B}_{\ker f} = \{(-4,0,1)\} \end{cases}$$

3) Si esistono e sono tutti i valori di $k \neq -1$

base per $\ker f = \{(1,0,0)\}$ nucleo righe
$\operatorname{Im} f$ colonne
base $k=0$, base per $\operatorname{Im} f = \{(1,2,0),(0,2,0)\}$
$k=-2$

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\ker f$

$$\begin{cases} -2x+y-2z=0 \\ 2z=0 \\ -4z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x \\ z=0 \end{cases}$$

$\ker f = \{(x,2x,0) \; x \in \mathbb{R}\}$ base $= \{(1,2,0)\}$

base per $\operatorname{Im} f = \{(1,0,0),(-2,2,-4)\}$

Quando abbiamo un endomorfismo se è applicazione è iniettiva è anche suriettiva o viceversa

3) f è sia iniettiva che suriettiva se e solo se $k \neq 0, -2$

4) per $k=0$, determinare la controimmagine di $(1,2,0)$ e $(0,1,2)$

5) per $k=1$, det. se possibile, f^{-1}

4) $A_f \Rightarrow k=0$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f^{-1}((1,2,0)) \rightarrow f((x,y,z)) = (1,2,0)$

$(y, 2y+2z, 0) = (1,2,0)$

$$\begin{cases} y=1 \\ 2y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$f^{-1}(1,2,0) = \{(x,1,0) \; x \in \mathbb{R}\}$

non è un sottospazio ? perché?

$f^{-1}((0,1,2))$ non è possibile

5) det f^{-1}

$f((x,y,z)) = (x+y+z,\ 3y+2z,\ 2z) = (a,b,c)$

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ 3y+2z=b \\ 2z=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ 3y+c=b \\ z=\frac{c}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = a - \frac{b-c}{3} - \frac{c}{2} = \frac{6a-2b+2c-3c}{6} \\ y = \frac{b-c}{3} \\ z = \frac{c}{2} \end{cases}$$

$= \frac{6a-2b-c}{6}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

XXX IV Lezione
13/01/10

Geometria e combinatoria

Proposizione:

V, V' sp. vett. reali $\quad \dim V = \dim V' = n$

allora : V e V' sono isomorfi

Dimostrazione:

$\exists f: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfo

$\exists g: V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo

$g^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow V'$ isomorfismo

$V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g^{-1}} V'$

$g^{-1} \circ f$ isomorfismo

Ad ogni trasformazione lineare si può associare una matrice e viceversa

MATRICI ED APPLICAZIONI LINEARI

$f: V \longrightarrow V'$ lineare $\quad \dim V = n \quad \dim V' = m$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $B' = \{w_1, \dots w_m\}$ base di V'

$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$

$f(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$

$f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$

Matrice associata a f rispetto alle basi B e B'

$$A_f^{B,B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \\ f(v_1) & f(v_2) & & \end{pmatrix}$$

matrice $m \times n$

$H_{n \times m}$ ie numero delle colonne dominio ~~spazio di arrivo~~ e n. delle righe è ~~il dominio~~ spazio di arrivo ie codominio

per $K = \frac{1}{3} \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 2 \Rightarrow B_{\mathrm{Im}f} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

per $K \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 3$

$K = \frac{1}{3} \Rightarrow \dim \ker f = 1$

$K \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \dim \ker f = 0$

$$\begin{cases} x + 4z = 0 \\ \frac{1}{3}y + z = 0 \\ \frac{4}{3}y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4z \\ y = -3z \\ \forall z \end{cases}$$

per $K = \frac{1}{3}$ $\ker f = \{(-4z, -3z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

$B_{\ker f} = \{(-4,-3,1)\}$

la base del ~~nucleo~~ nucleo è vuota

2) $f((x,y,z)) = (x+4z, y+z, 2y+4z)$

$f((0,1,0)) = (0,1,2) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1) =$

$= (\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = \beta + \gamma \\ 2 = \alpha + \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 1 = \beta + 2 + \beta \\ 2 + \beta = \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria

XXXV lezione
13/01/11

ESERCIZI:

Data $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (kx+y+kz, (k+2)y+2z, 2kz)$ $k \in \mathbb{R}$

① Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica

② Det una base e la dimensione di Kerf e Imf al variare di $k \in \mathbb{R}$

③ Per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che f è iniettiva? per quali suriettiva? Per quali biettiva?

1) $A_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k+2 & 2 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

2) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A_f$

$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k+2 & 2 \\ 0 & 0 & 2k \end{vmatrix}$ $\operatorname{rg} A_f = 3 \quad \forall k \neq 0, -2$

$\operatorname{rg} A = 2 \quad$ per $k = -2$

per $k \neq 0, -2$ $\dim \operatorname{Im} f = 3$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ (iniettiva e suriettiva)

per $k = 0, -2$ $\dim \operatorname{Im} f = 2$ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

per $k \neq 0, -2$ Kerf non ha una base

$\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

base per Imf è per esempio la base canonica

per $k = 0$

$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0\}$

$f((x,y,z)) = (y, 2y+2z, 0)$?

$\begin{cases} y = 0 \\ 2y+2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\operatorname{Ker} f = \{(x,0,0) \; x \in \mathbb{R}\}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

XXXII Lezione
10/01/10

Geometria e combinatoria

Definizione : $f: V \longrightarrow V'$ lineare

Si definisce Nucleo di f e si denota $\underline{\ker f}$ l'insieme

$$\ker f = \{ v \in V \,/\, f(v) = 0_{V'} \}$$

! un sottospazio non è mai vuoto, contiene almeno l'elemento nullo.

Proposizione:

$f: V \longrightarrow V'$ lineare

Allora $\ker f$ è un sottospazio di V

Dimostrazione: $\forall v, w \in \ker f \Rightarrow f(v+w) = f(v) + f(w)$

$= 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'} \Rightarrow v+w \in \ker f$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in \ker f \Rightarrow f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \cdot 0_{V'} = 0_V$

$\Rightarrow \alpha v \in \ker f$ (ie nucleo è un sottospazio di V)

Osservazione 1 $f: V \longrightarrow V'$ lineare

f è suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V'$

Osservazione 2 $f: V \longrightarrow V'$ lineare

f iniettivo $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_V\}$

Dimostrazione $\Rightarrow$

$z \in \ker f \Rightarrow f(z) = 0_{V'} = f(0_V)$

$\Rightarrow z = 0_V \Rightarrow \ker f = \{0_V\}$

Dimostrazione $\Leftarrow$

$f(v) = f(w) \Rightarrow f(v) - f(w) = 0_V$

$\Rightarrow f(v-w) = 0_V \Rightarrow v-w \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow$

$\Rightarrow v-w = 0_V \Rightarrow v = w$

Es:

V sp. vettoriale reale, $\dim V = 3$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V

$\forall v \in V: \; v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$.

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

XXXIV lezione
13/01/10

Geometria e combinatoria

Osservazione: $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

B base di V

A_f^B

B' base di V

$A_f^{B'}$

$A_f^{B'} = C^{-1} \cdot A_f^B \cdot C$

$A_f^{B'}$ e A_f^B si dicono SIMILI

↳ (relazione di equivalenza)

dove C è la matrice del cambio di base. C ha come colonne le componenti di vettori di B' nella base di B

Osservazione

$f: V \longrightarrow V'$ $\quad A_f^{BB'}$

1) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A_f^{B,B'}$

2) $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \operatorname{rg} A_f^{B,B'}$

Es.:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (x+4z, ky+z, (k+1)y+4z)$

1) $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$

2) $k=1$ II colonna della matrice $A_f^{BB'}$

$B' = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$

B base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$A_f^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A_f^3 \geq 2$$

$\det A_f^B = 4k - k - 1 = 3k - 1$

$k \neq \frac{1}{3} \quad \operatorname{rg} A_f^B = 3$

Dim $\Leftarrow$ basta che inverto le frecce nell'altro senso.

TEOREMA

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

fissiamo $\mathcal{B}$ base di V, $A = A^{\mathcal{B}}_{f}$

allora:

$\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $f \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$\lambda = \pm 1$ $\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda = -1$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \Rightarrow f((x,y)) = (-y, -x)$$

Geometria e Combinatoria — XXXV lezione 14/01/10

$$f^{-1}((a,b,c)) = \left(\frac{6a-2b-c}{6}, \frac{b-c}{3}, \frac{c}{2}\right)$$

$$A_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO:

Data $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (kx+y+kz, (k+2)y+2z, 2kz)$ $k \in \mathbb{R}$

6) Sia $k=1$ sia $\mathcal{B}$ la base canonica,

$\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ a) $A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ b) $A_f^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

Scrivere la prima colonna delle matrici c) $A_f^{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$

$k=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $f((x,y,z)) = (x+y+z, 3y+2z, 2z)$

$A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ → $f((1,0,0))$

$f((1,0,0)) = (1,0,0)$

$= \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \alpha = -\beta \\ \gamma = -\beta \end{matrix}$ $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = -\frac{1}{2}$ $\gamma = \frac{1}{2}$

$A_f^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 3 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$f((1,1,0)) = (2,3,0) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(0,0,1)$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

DIAGONALIZZAZIONE DI UN ENDOMORFISMO

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

f si dice diagonalizzabile se esiste una base B di V tale che $A_f^B = D$ diagonale

Es

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (2x+y+z, 2x+3y+4z, -x-y-2z)$

$\bar{B} = \{(1,-1,0), (0,1,-1), (2,3,-1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$A_f^{\bar{B}} = ?$

$f((1,-1,0)) = (1,-1,0) = 1(1,-1,0) + 0(0,1,-1) + 0(2,3,-1)$

$f((0,1,-1)) = (0,-1,1) = 0(1,-1,0) - 1(0,1,-1) + 0(2,3,-1)$

$f((2,3,-1)) = (6,9,-3) = 0(1,-1,0) + 0(0,1,-1) + 3(2,3,-1)$

$$A_f^{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi f è diagonalizzabile

B base canonica

forma diagonale $\rightarrow$ $$A_f^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

la ottengo con la base canonica

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ metto come colonne i vettori di $\bar{B}$ rispetto alla base canonica

$$C^{-1} \cdot A_f^B \cdot C = A_f^{\bar{B}}$$

$C \Rightarrow$ matrice diagonalizzante

$f((1,-1,0)) = (1,-1,0) = 1(1,-1,0)$

$f((0,1,-1)) = (0,-1,1) = -1(0,-1,1)$

$f((2,3,-1)) = (6,9,-3) = 3(2,3,-1)$

XXXVI lezione
17/01/11

Geometria e calcolo numerico

Definizione: $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice **diagonalizzabile** se esiste $C \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile $/ C^{-1} \cdot A \cdot C = D$ diagonale
(simile ad una matrice diagonale)

Definizione: $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo
$v \in V$, $v = 0_V$, si dice autovettore di f relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se $f(v) = \lambda v$

Osservazione: $f(v) = \lambda_1 v$, $f(v) = \lambda_2 v$
λ_1, λ_2 autovalori relativi a v? NO
$\lambda_1 v = \lambda_2 v \quad (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Osservazione: $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di f
$v \in V$ autovettore di f
$\alpha v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \Rightarrow$
αv autovettore di f relativo a λ
$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$

cosa mi dovrebbe dare?

TEOREMA:
$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo è diagonalizzabile $\iff \exists$ una base B, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V costituita da autovettori di f

Dim $\Rightarrow$ f è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists B = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V / $A_f^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots 0 v_n$
$f(v_2) = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_n$
$f(v_n) = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + \lambda_m v_n$

v_1, v_n sono autovettori $\Rightarrow$ Base costituita da autovettori

Osservazione: gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico.

Definizione: $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ autovalore di f
si dice molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$ e si denota $m_a(\bar{\lambda})$ il numero delle radici coincidenti con $\bar{\lambda}$

Es:

$p(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)(\lambda-4)^2$

2, 3, 4 autovalori

$m_a(2) = 3$, $m_a(3) = 1$; $m_a(4) = 2$

Proposizione

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ autovalori distinti di f, $v_1, \dots, v_k \in V$ autovettori relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ allora

$v_1, \dots v_k$ lin. indipendenti

Corollario

f endomorfismo di V, $\dim V = n$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori distinti di f $\Rightarrow$ f è diagonalizzabile

Es:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (z,y,x)$ B base canonica

$A = A_f^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$(1-\lambda)\left[\lambda^2 - 1\right]$ polinomio caratteristico

$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -1$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e calcolo numerico

~~XXXVI~~ lezione 17/01/11

$f: V \longrightarrow V'$

B, B' basi

$A_f^{BB'}$ ha come colonne le componenti dei vettori $f(v_1), \dots f(v_n)$ rispetto a B^{-1} essendo $B = \{v_1, \dots v_n\}$

Es

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ matrice 2×3

A individua $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare

$f((x,y,z))$?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+3z \\ +4y-5z \end{pmatrix}$$

$$f((x,y,z)) = (-x+2y+3z,\ 4y-5z)$$

Osservazione

f endomorfismo di V

$f: V \longrightarrow V$ lineare

B base di V $\quad A = A_f^B$

B' base di V

$A' = A_f^{B'}$

1) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = \dim \operatorname{Im} f$

$A' = C^{-1} A \cdot C$ ← il prodotto vettoriale non è commutativo

dove C matrice del cambiamento di base da B a B'

C ha come colonne le componenti dei vettori di B' rispetto a B

2) $\det A' = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$

qui si può commutare in quanto sto operando con numeri reali

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V_{\bar\lambda} \Rightarrow f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\bar\lambda v) = \bar\lambda(\alpha v)$

$\Rightarrow \alpha v \in V_{\bar\lambda}$

Definizione: $\bar\lambda \in \mathbb{R}$, autovalore di f, si definisce molteplicità geometrica di $\bar\lambda$ e si denota $mg(\bar\lambda)$ la dimensione di $V_{\bar\lambda}$, $mg(\bar\lambda) = \dim(V_{\bar\lambda})$

Proposizione: $mg(\bar\lambda) \leq ma(\bar\lambda)$

Osservazione se $ma(\bar\lambda) = 1 \Rightarrow mg(\bar\lambda) = 1$

TEOREMA: f endomorfismo di V, $\dim V = n$, $\lambda_1, \dots \lambda_k$ autovalori di f. Allora:

f è diagonalizzabile $\iff$ 1) $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$
2) $\forall \lambda_i : ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

Es: (D'ESAME)

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (-kx+y, -y, 2x-3y+kz)$

1. Per $k=1$ verificare che è lineare
2. Determinare $\ker f$ al valore di k ed una sua base
3. $k \in \mathbb{R}$, determ. $\inf$ e una sua base
4. $\exists$ valori di k per cui f è suriettiva)
5. se B' base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $B' = \{(1,0,1)(1,1,0)(0,1,1)\}$ det la seconda colonna $A_f^{B'B'}$
6. det. i valori di k per i quali f è diagonalizzabile
7. fissato un valore di k, det. una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da auto vettori di f
8. fissato un valore di k, det una forma diagonale e una matrice diagonalizzante

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria — XXXVII lezione 18/01/11

TEOREMA

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

$\mathcal{B}$ base di V

$A = A^{\mathcal{B}}_f$ allora:

$\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $f \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Dimostrazione:

$\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $f \iff \exists\, v \in V,\ v \neq 0_V$ tale che

$f(v) = \lambda v \quad (v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$

$$\iff A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

ha autosoluzioni $\iff \det(A - \lambda I) = 0$

(!) se un sistema ammette solo lo zero come soluzione non abbiamo né autovettori né autovalori
→ questo teorema non dipende dalla base fissata

TEOREMA

$A = A^{\mathcal{B}}_f$, $A' = A^{\mathcal{B}'}_f$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V allora

$\det(A' - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$

Dimostrazione

poiché sono simili $A' = C^{-1} A \cdot C$

$$\det(A' - \lambda I) = \det(C^{-1} A C - C^{-1} \lambda I C)$$

$$= \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \det C =$$

$$= \det(A - \lambda I)$$

Definizione

$\det(A - \lambda I)$ polinomio in λ di grado n che prende il nome di polinomio caratteristico di f

$\det(A - \lambda I) = 0$ si dice equazione caratteristica

XXX IX Lezione 20/01/10

Geometria e Combinatoria

ESERCIZIO D'ESAME

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) \longrightarrow (-kx+y, -y, 2x-3y+kz)$

① $k=1$, f lineare

Ⓐ $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') =$

$= (-x+y-x'+y', -y-y', 2(x+x')-3(y+y')+(z+z') =$

$= (-x+y, -y, 2x-3y+z) + (-x'+y', -y', 2x'-3y'+z')$

$= f((x,y,z)) + f((x',y',z'))$

Ⓑ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$f(\alpha(x,y,z)) = f((\alpha x, \alpha y, \alpha z)) = (-\alpha x + \alpha y, -\alpha y, 2\alpha x - 3\alpha y + \alpha z)$

$\alpha(-x+y, -y, 2x-3y+z) = \alpha f((x,y,z))$

② $\ker f$ è una sua base $\forall k \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) \in \ker f \iff f((x,y,z)) = (0,0,0) \iff$

$(-kx+y, -y, 2x-3y+kz) = (0,0,0)$

$\begin{cases} -kx+y=0 \\ -y=0 \\ 2x-3y+kz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ kx=0 \\ 2x+kz=0 \end{cases}$ → $k \neq 0$ → $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

→ $k=0$ → $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$k \neq 0$: $\ker f = \{(0,0,0)\}$, $\dim \ker f = 0$, $B_{\ker f} = \emptyset$

$k=0$: $\ker f = \{(0,0,z)\}$, $\dim \ker f = 1$, $B_{\ker f} = \{(0,0,1)\}$

③ $\operatorname{Im} f$ e una sua base $\forall k \in \mathbb{R}$

$B = \{\underset{v_1}{(1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,1,0)}, \underset{v_3}{(0,0,1)}\}$

$\operatorname{Im} f = \{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$

$f((1,0,0)) = (-k, 0, 2)$

$f((0,1,0)) = (1, -1, -3)$

$f((0,0,1)) = (0, 0, k)$

Studio indipendenza dei vettori senza la matrice associata

Geometria e combinatoria

~~XXXVIII~~ lezione 18/01/11

Autovettori relativi a $\lambda_3 = -1$

$f((x,y,z)) = 1(x,y,z)$

$(z,y,x) = (-x,-y,-z)$

$\begin{cases} z=-x \\ y=-y \\ x=-z \end{cases} \begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow$ Autovettori relativi a $\lambda_3=-1$ $(-z,0,z)$, $z\neq 0$

Autovettori relativi a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$f((x,y,z)) = 1(x,y,z)$

$(z,y,x) = (x,y,z)$

$\begin{cases} z=x \\ y=y \\ x=z \end{cases} \begin{cases} x=z \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (z,y,z)$

$v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ autovettori relativi a $\lambda_1=\lambda_2=1$ linearmente indipendenti

$v_3 = (-1,0,1)$ autovettore relativo a $\lambda_3 = 1$

$B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f $\Rightarrow$ f diagonalizzabile

(!) Esistono endomorfismi diagonalizzabile con due ~~vettori~~ autovettori coincidenti $\Rightarrow$ ricontrollare il teorema e vedere che la freccia non si può invertire

Definizione: f endomorfismo di V, $\bar{\lambda}$ autovalore di f.

Si definisce autospazio relativo a $\bar{\lambda}$ e si denota $V_{\bar{\lambda}}$ l'insieme

$V_{\bar{\lambda}} = \{v \in V \mid f(v) = \bar{\lambda} v\}$

(autovettori relativi a $\bar{\lambda}$, $0_V \in V_{\bar{\lambda}}$)

~~Proposizione~~

Proposizione: $V_{\bar{\lambda}}$ è un sottospazio di V

Dimostrazione $\forall v,w \in V_{\bar{\lambda}} \Rightarrow f(v+w) = f(v) + f(w)$

$= \bar{\lambda} v + \bar{\lambda} w = \bar{\lambda}(v+w)$

$\Rightarrow v+w \in V_{\bar{\lambda}}$

$$V_{-2} = \begin{cases} y = 0 \\ 2x = -4z \\ 4x \end{cases} \Rightarrow V_{-2} : (-2z, 0, z)$$

$$V_{-1} = \begin{cases} y = x \\ x = 3z \end{cases} \Rightarrow V_{-1} : (3z, 3z, z)$$

$B = \{(0,0,1), (-2,0,1), (3,3,1)\}$ base di autovettori

(8) $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice ~~diagonalizzabile~~ diagonalizzante

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ forma diagonale perché

$f((0,0,1)) = 2(0,0,1) \dots$

$C^{-1} \cdot A \cdot C = D$

$$\det \begin{pmatrix} -k & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k^2$$

$k \neq 0$ $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ indipendenti

$\Rightarrow B_{Imf} = \{(-k,0,2), (1,-1,-3), (0,0,k)\}$

$k=0$: $f(v_3)$ nullo (dipendente) $\Rightarrow B_{Imf} = \{(-k,0,2),(1,-1,-3)$ $(0,0,k)\}$

$k=0$: $f(v_3)$ nullo (dipendente) $\Rightarrow B_{Imf} = \{(0,0,2),(1,-1,-3)\}$

④ $\exists\, k$ / f suriettiva?

$k \neq 0 \Rightarrow Imf = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ f suriettiva

⑤ B base canonica

$B' = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ 2ª colonna di $A_f^{BB'}$

$f((0,1,0)) = (1,-1,-3) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1)$

$= (\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha+\beta \\ -1 = \beta+\gamma \\ -3 = \alpha+\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1-\beta \\ -3 = 1-\beta+\gamma \\ -1 = \beta+\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1-\beta \\ -4+\beta = \gamma \\ -1+4 = \beta+\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 3/2 \\ \alpha = -1/2 \\ \gamma = -3/2 \end{cases} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

⑥ k / f diagonalizzabile

$$A = A_f^B = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & k \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} (-k-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (-1-\lambda) & 0 \\ 2 & -3 & (k-\lambda) \end{pmatrix}$$

$= (k-\lambda)(-k-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

autovalori di f $\Rightarrow \lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -k$, $\lambda_3 = -1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow k = 0$

$\lambda_1 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow k = -1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$\vec{i} \longmapsto (1,0,0)$

$\vec{j} \longmapsto (0,1,0)$

$\vec{k} \longmapsto (0,0,1)$

BASE ORTONORMALE

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ base ortonormale

$\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$

$|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$

Definizione : Prodotto scalare canonico

$\langle (x,y), (x',y') \rangle = xx' + yy'$

$B = \{(1,0), (0,1)\}$

a) $(1,0) \perp (0,1)$

b) $|(1,0)| = |(0,1)| = 1$

a) $xx' + yy' = 0 \qquad 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

b) $|(1,0)| = \sqrt{1} = 1$

$|(0,1)| = \sqrt{1} = 1$

Es $B = \{\underset{v_1}{(1,1)}, \underset{v_2}{(2,-3)}\}$

ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$

$B' = \{w_1, w_2\}$ ortogonale a $w_1 \perp w_2$

$w_2 = (2,-3) - \left(\frac{-1}{2}\right)(1,1) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) = w_2$

$w_2 = (2,-3) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$B' = \left\{(1,1), \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$ Base

$\left\langle (1,1), \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) \right\rangle = 0$

$|(1,1)| = \sqrt{2}$

$\left|\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)\right| = \sqrt{2}$

~~Geometria~~ Geometria e combinatoria

XxxIX sessione 20/01/10

- $k \notin \{0,1,-1\} \Rightarrow$ 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ f diagonalizzabile
- $k=0 \Rightarrow m_a(0)=2$

$\dim \ker f = m_g(0) = \dim V_0 = 1$

$m_a(0) \neq m_g(0) \rightarrow$ f non diagonalizzabile per $k=0$

Autospazio relativo all'autovalore $\lambda=0$

$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = \overset{\lambda}{0}(x,y,z)\}$

- $k=-1 \Rightarrow m_a(-1)=2$

$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = -1(x,y,z)\}$ $\lambda=-1$ non per $k=-1$

$$\begin{cases} x+y=-x \\ -y=-y \\ 2x-3y-z=-z \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ \forall z \in \mathbb{R} \\ y=\frac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$m_a(-1) \neq m_g(-1) \Rightarrow$ f non è diagonalizzabile

($m_a(-1)=2$, $m_g(-1)=1$)

- $k=1$

$m_a(1)=2$

$$\begin{cases} -x+y=-x \\ -y=-y \\ 2x-3y+z=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x=-z \end{cases} \quad (x,0,-x)$$

$m_g(-1)=2 \neq m_a(-1)=1 \rightarrow$ f non è diagonalizzabile

⑦ k fissato, $B_{\mathbb{R}^3}$ di autovalori

$k=2$: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_1=-1$

$f((x,y,z)) = (-2x+y, -y, 2x-3y+2z)$

$$V_2: \begin{cases} -2x+y=2x \\ -y=2y \\ 2x-3y+2z=2z \end{cases} \qquad V_{-2}: \begin{cases} -2x+y=-2x \\ -y=-2y \\ 2x-3y+2z=-2z \end{cases}$$

$$V_{-1}: \begin{cases} -2x+y=-x \\ -y=-y \\ 2x-3y+2z=-z \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow V_2: (0,0,z)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

C^{-1} che corotteristiche ha?

$\det C = 1$

Es Diagonalizzare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria

~~xxxx~~ ese. 23/01/19

Es

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = 2$

$\dim V = 3$

a) f iniettiva?
b) f suriettiva?
c) $\det A_f^B$

$\exists v \in V$, auto vettore di f / $f(v) = 0 \cdot v$

$v = 0_V \qquad v \in \ker f \Rightarrow \ker f \neq \{0_V\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f non è iniettiva

$\det A_f^B = \det D = 0$

$C^{-1} A \cdot C = D \Rightarrow A = C \cdot D \cdot C^{-1}$

$\det A = \det (\det D \cdot \det C^{-1})$

Es

Determinare i vettori di modulo 3 perpendicolari a

$\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3$

$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Esiste sempre uno spazio vettoriale di dimensione 3

$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

~~xxx~~ $\vec{u} \cdot \vec{u} = xx' + yy' + zz'$

$f: V \xrightarrow{\text{isomorfismo}} \mathbb{R}^3$

$\vec{OP} \longmapsto (x, y, z)$

PRODOTTO SCALARE CANONICO in $\mathbb{R}^n$

$\langle (x,y,z), (x',y',z') \rangle = xx' + yy' + zz'$

$\Rightarrow$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

$f^{-1}((1,0,2)) = ? = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = (1,0,2)\}$

$\begin{cases} x-y+2z = 1 \\ y = 0 \\ x-y+3z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1-2z \\ y = 0 \\ x-y+3z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$f^{-1}((1,0,2)) = \{(-1,0,1)\}$

Es $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (x-y+2z, 0, -y+3z)$

$f^{-1}((1,0,2))$ $\begin{cases} x-y+2z = 1 \\ 0 = 0 \\ -y+3z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-3z+z+2z = 1 \\ 0 = 0 \\ y = 3z-2 \end{cases}$

$f^{-1}((1,0,2)) = \{(z-1, 3z-2, z) / z \in \mathbb{R}\}$ $\begin{cases} x = z-1 \\ y = 3z-2 \end{cases}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1) determinare le valore di α per i quali è diagonalizzabile
2) Determinare una base di autovettori

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha z \\ x+\alpha y \\ 2x+z \end{pmatrix}$ $f((x,y,z)) = (x+\alpha z, x+\alpha y, 2x+z)$

$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= (\alpha-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 2\alpha\right] = (\alpha-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2\alpha)$

$\lambda_1 = \alpha$

$\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-1+2\alpha} = 1 \pm \sqrt{2\alpha}$ $\alpha \geq 0$ gli autovalori devono essere reali

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ per $\alpha = 0$

Geometria e combinatoria

xxxx
21/04/11

$$\left|\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$ Base ortonormale

se divido per ie modulo trovo un vettore di mod 1

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice simmetrica perche uguale alla sua trasposta

diagonalizzazione

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$f((x,y)) = (x+y, x+y)$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \{(x,y) \mid f((x,y)) = 0(x,y)\}$$

$$V_2 = \{(x,y) \mid f((x,y)) = 2(x,y)\}$$

$$f((x,y)) = (x+y, x+y)$$

(1) una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases}$$

$(x, -x)$ $\qquad$ (x, x)

$$\overline{B} = \{(1,-1), (1,1)\}$$ base ortogonale

normalizzo questi due vettori ovvero divido per ie modulo

$$B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$ BASE ORTONORMALE DI VETTORI

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ matrice diagonalizzante

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Es: $T = \{(x,y,z) \mid x-2y=0,\ x+z=0\}$

determinare S, supplementare di T

$S \cap T = \{(0,0,0)\}$, $S+T = \mathbb{R}^3$

$\dim S + \dim T = 0+3$

$\dim S = 3 - \dim T$

$T = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$\dim S = 2$ $\qquad B_T = \{\underset{v_1}{(2,1,-2)}\}$ base di T

$v_2 \in T \quad (0,1,0) \Rightarrow v_2 = (0,1,0)$

$v_3 \notin \langle \{(2,1,-2), (0,1,0)\} \rangle$

$= \{\alpha(2,1,-2) + \beta(0,1,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

$\{(2\alpha, \alpha+\beta, -2\alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\alpha(2,1,-2) + \beta(0,1,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

$v_3 = (1,4,0) \notin U$

$B_S = \langle \{(1,4,0), (0,1,0)\} \rangle$

$S = \{\alpha'(0,1,0) + \beta'(1,4,0) \mid \alpha,\beta' \in \mathbb{R}\}$

Es $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f((a,b)) = (a+3b, 2b)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$g((1,0,1)) = (-1,1)$

$g((0,1)) = (2,3)$

1) $g \circ f$ è invertibile?
2) determinare la matrice $A^B_{g \circ f}$
3) Trovare g^{-1} se esiste

$A^B_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^B_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow g((x,y)) = g(x(1,0) + y(0,1))$

$= x(-1,1) + y(2,3) = (-x+2y, x+3y)$

$g(f((x,y))) = g((x+3y, 2y)) = (-x-3y+2y, x+3y+6y) =$

$(-x+y, x+9y)$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatorie

24/01/11

Osservazione

$\mathbb{R}^2$ prodotto scalare canonico

$\langle (x,y); (x',y') \rangle = xx' + yy'$

$B = \{v_1, v_2\}$ base di $\mathbb{R}$

$B' = \left\{ \frac{w_1}{|w_1|}, \frac{w_2}{|w_2|} \right\}$ base ortonormale $\Leftarrow$

{ Procedimento di Gram-Schmidt

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

$w_1 \perp w_2$ ($\langle w_1, w_2 \rangle = 0$)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ / endomorfismo, A simmetrica

allora: f è diagonalizzabile

$\bar{B}$ base ortonormale di autovettori

C, matrice diagonalizzante

$\Rightarrow C^{-1} = C^T$ (C MATRICE ORTOGONALE)

↳ ie suo det è uguale a ± 1

$CC^{-1} = I \quad CC^T = I \Leftarrow$

$(\det C)^2 = 1$

$\det C = \pm 1$

Es.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (x - y + 2z, y, x - y + 3z)$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B' = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$

Determinare: $A_f^{B',B}$, $A_f^{B'}$

$f((1,1,0)) = (0,1,0) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1) =$
$= (\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma)$

$f((0,1,1)) = (1,1,2)$

$f((1,0,1)) = (3,0,4)$

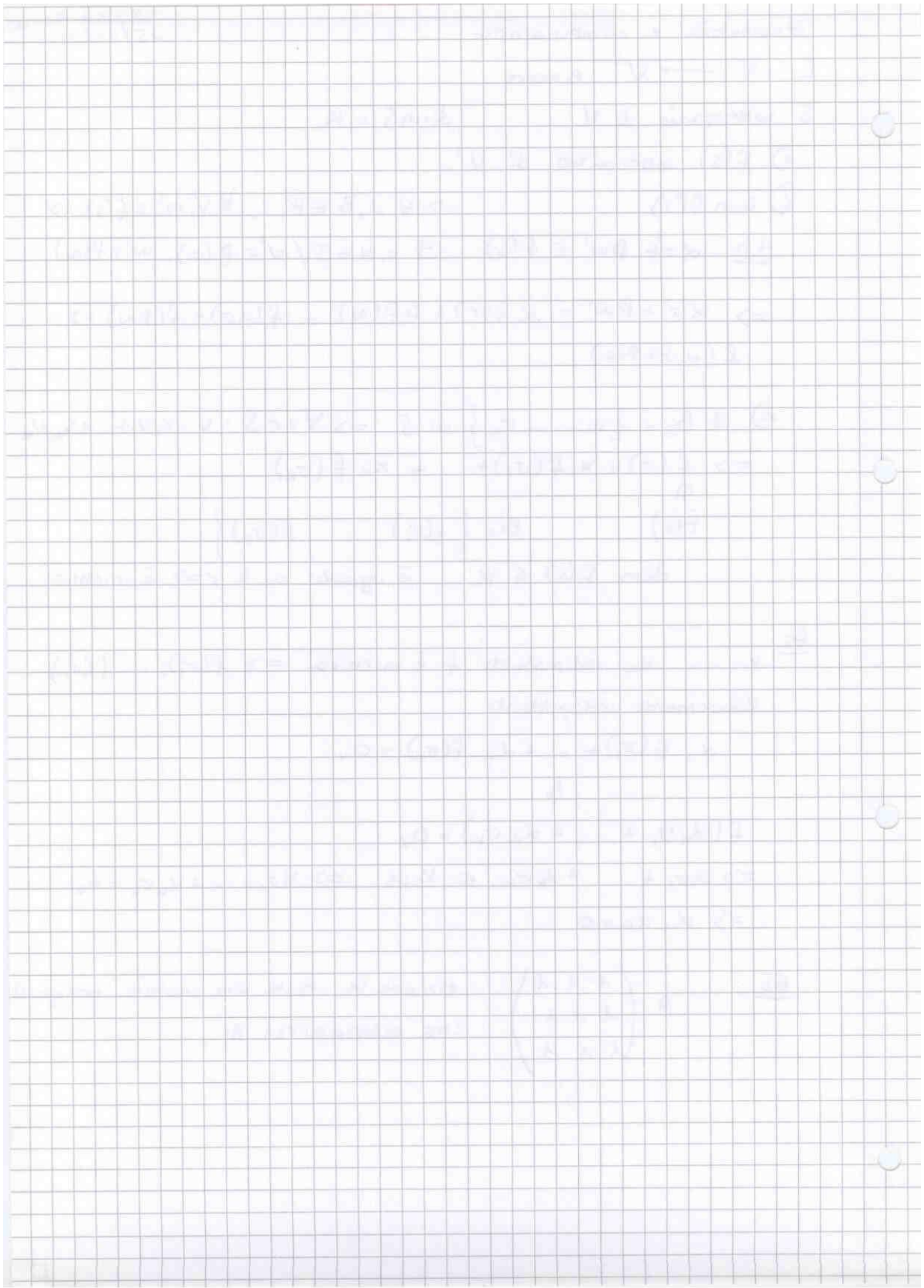
$\begin{cases} 0 = \alpha + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \beta + \gamma \end{cases}$

$A_f^{B',B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \alpha = -\gamma \\ 1 = -\gamma + \beta \\ \beta = -\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

$A_f^{B'} \begin{pmatrix} 1/2 & \cdots & \cdots \\ 1/2 & \cdots & \cdots \\ -1/2 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Geometria e combinatoria 24/01/11

$$(\lambda-1)^2 = 2\lambda$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2\lambda = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Se $\lambda \in \{0, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\} \Rightarrow f$ è diagonalizzabile

Studio la molteplicità $\Rightarrow$ algebrica e geometrica

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = 1(x,y,z)\}$ $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\begin{cases} x = x \\ x = y \\ 2x + z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\dim V_1 = mg(1) = 1 \neq ma(1) = 2 \Rightarrow f$ non è diagonalizzab.

$\lambda = 2, \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -1$

$$V_{2,3,-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = 2(3)(-1)(x,y,z)\}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 2x \\ x + 2y = 2y \\ 2x + z = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = 3x \\ x + 2y = 3y \\ 2x + z = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = -x \\ x + 2y = -y \\ 2x + z = -z \end{cases}$$

(!) tutti questi sistemi hanno infinite soluzioni (se viene il vettore nullo significa che ho sbagliato ~~det~~ poiché $\det(A - \lambda I)$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} y = z \\ x = z \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = \frac{z}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\{(0,y,0)/y \in \mathbb{R}\} \quad \{(z,z,z)/z \in \mathbb{R}\} \quad \{(-z, \tfrac{z}{3}, z)/z \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \left\{(0,1,0), (1,1,1), (-1, \tfrac{1}{3}, 1)\right\} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(!) il determinante di C non è mai uguale a 0

$\lambda_1 = 3k$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = k+4$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ per $k = 0$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ per $k = -4$

$\lambda_1 = \lambda_3 = 6$ per $k = 2$

per $k \notin \{0, -4, 2\}$ $\Rightarrow$ 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ f diagonalizzabile

$m_g(0) = 1 = \dim \ker f \quad \forall k \in \mathbb{R}$

per $k = 0$, $k = -4$ $\Rightarrow$ $m_a(0) \neq m_g(0) \Rightarrow$ f non è diagonalizz

$(3k - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - k\lambda) = (3k - \lambda)\lambda(\lambda - 4 - k)$

! Se la molteplicità geometrica è 1 anche quella algebrica sono 1 poiché $\det(A - \lambda I)$ genera infinite soluzioni

$k = 2$ autospazio relativo all'autovalore 6

$V_6 = \{(x, y, z) \mid f((x, y, z)) = 6(x, y, z)\}$

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 6x \\ 2x + 4y - 4z = 6y \\ 6z = 6z \end{cases} \quad \begin{cases} z = 4x - 4y \\ 2x + 4y - 16x + 16y = 6y \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$= \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow m_g(6) = 1 \neq m_a(6)$ non è diagonal

~~k è diagonalizzabile se $k \notin \{0, -4, 2\}$~~

$k = 1$ $\lambda_1 = 3$, $\lambda = 0$, $\lambda_3 = 5$

C ?

① $\begin{cases} x + 4y + z = 3x \\ x + 4y - 2z = 3y \\ 3z = 3z \end{cases}$ V_3

② $\begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$ V_0

③ $\begin{cases} x + 4y + z = 5x \\ x + 4y - 2z = 5y \\ 3z = 5z \end{cases}$ V_5

$B_{\mathbb{R}^3} = B_3 \cup B_0 \cup B_5$

XXXXII lezione
25/01/11

Geometria e combinatoria

$f: V \longrightarrow V'$ lineare

S sottospazio di V $\quad \dim S = k$

1) $f(S)$ sottospazio di V'

2) $\dim f(S)$ $\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v', w' \in f(S) \Rightarrow$

th $\alpha v' + \beta w' \in f(S)$ $\quad \exists v, w \in S / v' = f(v),\ w' = f(w)$

$\Rightarrow \alpha v' + \beta w' = \alpha f(v) + \beta f(w) = f(\alpha v) + f(\beta w) \Rightarrow$

$f(\alpha v + \beta w)$

2) $\exists B_S = \{v_1, \dots v_k\}$ di $S \Rightarrow \forall v \in S : v = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$

$\Rightarrow f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_k f(v_k)$

$\Uparrow$

$f(S)$ $\qquad B' = \{f(v_1), \dots f(v_k)\}$

$\dim f(S) \leq k$ è uguale a $k \Leftrightarrow$ è iniettiva

Es $v_1, \dots v_k$ indipendenti f è iniettiva $\Rightarrow f(v_1), \dots f(v_k)$ linearmente indipendenti

$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) = 0_V$

$\Downarrow$

$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0_V$

$\Rightarrow \alpha v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in \ker f \Rightarrow \alpha v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$

$\Rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_k = 0$

Es : $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ trovare se esiste una matrice ortogonale che diagonalizza A

dimostrare che

$$S = \{(x,y,z,w) \mid x-2y+3z=0\}$$

$(x,y,z,w), (x',y',z',w') \in S \Rightarrow (x+x', y+y', z+z', w+w') \in S$

perché $x+x'-2y-2y'+3z+3z' =$

$x-2y+3z+x'-2y'+3z'=0$

$0'' \quad 0'$

$$S = \{(2y-3z, y, z, w)$$

Geometria e combinatoria — ESERCITAZIONE (CORREZIONE) — 28/01/11

$f((x,y,z)) = (kx+4y+z,\ kx+4y-2kz,\ 3kz)$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} k & 4 & 1 \\ k & 4 & -2k \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} A$

$\det A = 3k \cdot 0 = 0$

$\forall k \in \mathbb{R}$ $\mathrm{rg} A = 2$

$B_{\mathrm{Im}f} = \{(4,4,0), (1,-2k,3k)\}$ $\forall k \in \mathbb{R}$ anche se $k=0$ => il vettore nullo è dipendente quindi non lo posso mettere nella Base.

$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im} f = 1$

DETERMINO KERF

$$\begin{cases} kx+4y+z=0 \\ kx+4y-2kz=0 \\ 3kz=0 \end{cases}$$

se $k \neq 0$

$$\begin{cases} y = -\frac{k}{4}x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

$\ker f = \left\{\left(x, -\frac{k}{4}x, 0\right) / x \in \mathbb{R}\right\}$

$B_{\ker f} = \left\{\left(1, -\frac{k}{4}, 0\right)\right\}$

se $k=0$

$$\begin{cases} kx+4y+z=0 \\ kx+4y-2kz=0 \\ 3kz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

devono essere soddisfatte da tutte e tre

$\ker f = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\}$ $B_{\ker f} = \{(1,0,0)\}$

non esistono valori di k per i quali f sia iniettiva

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} k-\lambda & 4 & 1 \\ k & 4-\lambda & -2k \\ 0 & 0 & 3k-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$

$(3k-\lambda)\left[(k-\lambda)(4-\lambda) - 4k\right] =$

$= (3k-\lambda)(y^2 - 4\lambda - k\lambda) = (3k-\lambda)\lambda(\lambda-k-k)$

Geometria e combinatoria

~~xxxxx~~ lez. 28/01/11

$\Rightarrow V_3 \begin{cases} z = 2x - 4y \\ x + 4y - 4x + 8y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2y \\ x = 3y \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$B_3 = \{(3,1,2)\}$

$V_0 = \{(-4y, y, 0) / y \in \mathbb{R}\}$

$B_0 = \{(-4,1,0)\}$

$V_5 \begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$B_5 = \{(1,1,0)\}$

$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

per $k = 1$

$f((x,y,z) = (x+4y+z,\ x+4y-2z,\ 3z)$

$B' = \{(1,0,1), (0,1,1), (2,1,0)\}$

$A_f^{B'}$

Seconda colonna

$f((0,1,1)) = (5,2,3) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(2,1,0)$

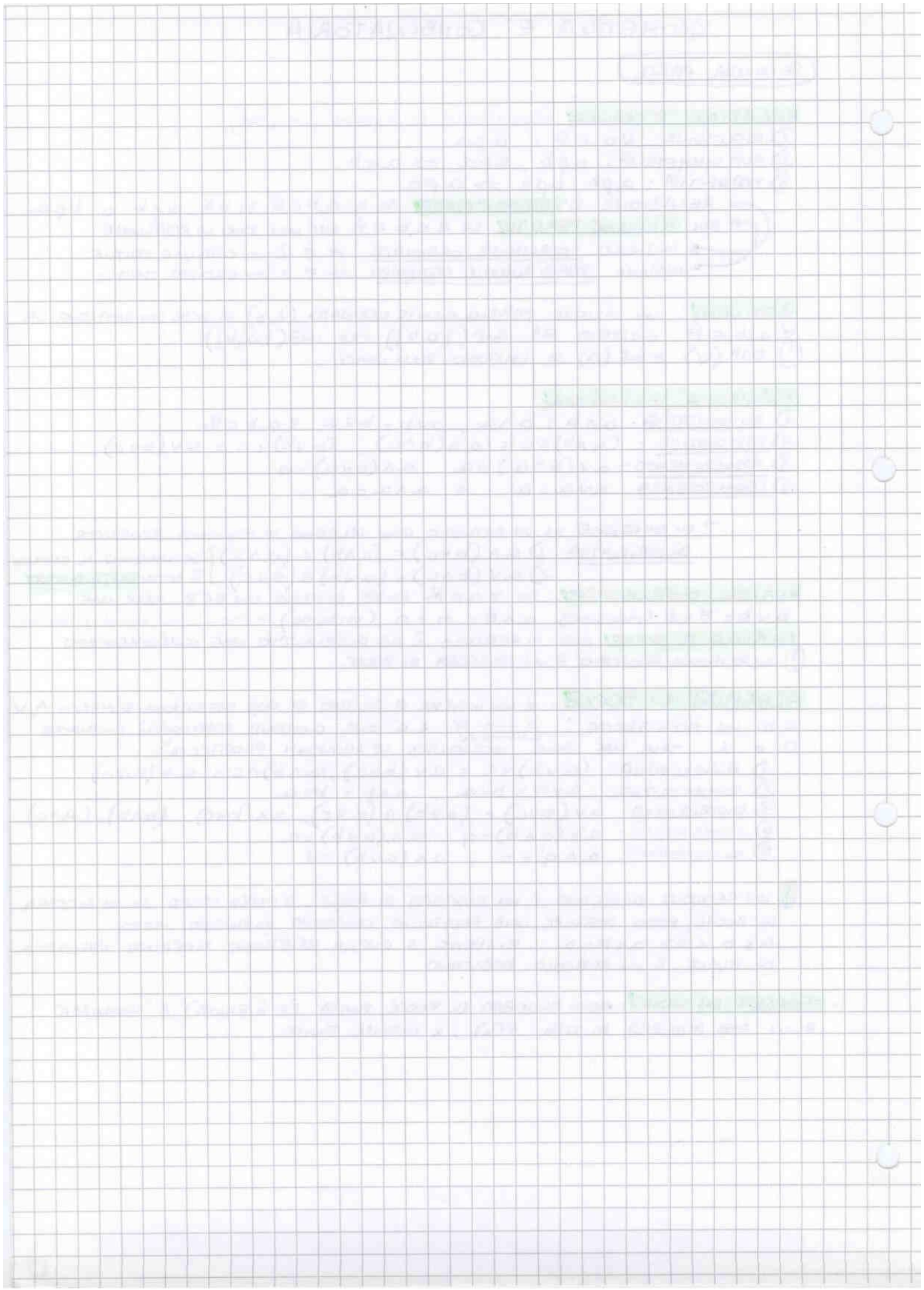
$\begin{cases} 5 = \alpha + 2\gamma \\ 2 = \beta + \gamma \\ 3 = \alpha + \beta \end{cases}$

$A_f^{B'}$ ha come colonne le componenti dei vettori $f(v_1'), f(v_2'), f(v_3')$ rispetto a B'

$f((0,1,1)) = (5,2,3) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(2,1,0) = (\alpha + 2\gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta)$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota
Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Rosaria Rota

Corso di Ingegneria Informatica Roma TRe
Anno di produzione: 2010-2011