

Sorgente : <http://holisi.hasanaj.com/>

Autore : HOLSI HASANAJ

Professore: SANTARSIERO

CORSO di INGEGNERIA INFORMATICA ROMA TRE

ANNO di PRODUZIONE: 2010-2011

Fisica : Meccanica

**È proibita QUALUNQUE riproduzione di questo Fascicolo,
ANCHE parziale, IN Libri,**

**PUBBLICAZIONI ANCHE telematiche, cd, dvd, Siti Web e ogni
altra FORMA di pubblicazione**

SENZA IL CONSENSO SCRITTO DELL'AUTORE.

**IN particolare, è proibita LA VENDITA di questo Fascicolo o di
parti di esso IN QUALUNQUE FORMA.**

Fisica

MECCANICA

I Sezione

1 / 03 / 11

parte della fisica che studia il moto dei corpi

CINEMATICA: descrizione matematica dei moti

DINAMICA: studia le cause del moto

PUNTO MATERIALE: è un modello che fornisce delle previsioni

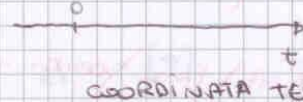
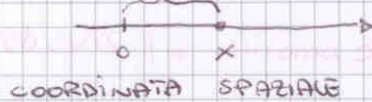
Moto di un punto materiale lungo un asse

→ fissare un sistema di riferimento

1) un verso positivo

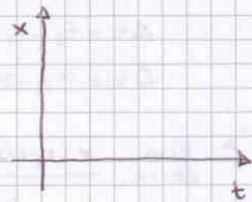
2) un origine

3) fissare un unità di misura



LEGGE ORARIA: $x(t)$, lo spazio in funzione del tempo

ISTANTE: particolare momento



3 / 03 / 11

MOTO UNIDIMENSIONALE

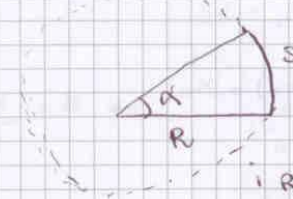
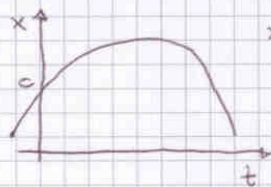
MOTO RETTILINEO UNIFORME



$$x(t) = at + b$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$x(t) = at^2 + bt + c$$

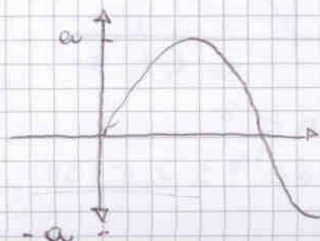


$$\alpha = \frac{S}{R}$$

I RADIANTI SONO
NUMERI PURI

I numeri puri sono importanti per

le funzioni trigonometriche ed esponenziali



$$x(t) = a \sin(bt)$$

Moto armonico

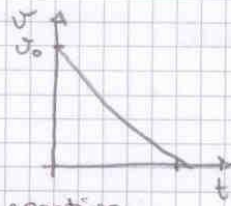


ES: un p.to materiale parte dalla posizione

$x_1 = 10$ con $v_1 = 6 \text{ m/s}$ diretta nel verso negativo

dell'asse x , e si muove con accelerazione costante $a = 5 \text{ m/s}^2$

Calcolare la minima coordinata raggiunta dal punto.



v_0

$$v = v_0 + at$$

$$\frac{-v_0}{a} = t$$

$$t = 1,2$$

$$x = 10 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$x = 10 + (-6 \cdot 1,2) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,2^2 = 6,4 \text{ m}$$

7,2 3,6

ES Un'automobile parte da ferma e raggiunge $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$

$\rightarrow v_1 = 100 \text{ km/h} \rightarrow a_2 = -6 \text{ m/s}^2$

Calcolare la durata del moto e lo spazio percorso

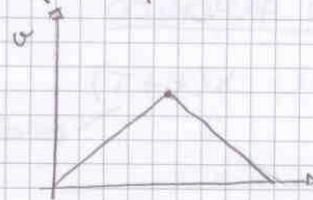
$$v_f = at$$

$$\frac{v_f}{a} = t$$

$$0 = v_0 + a(t - t_1) \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1}$$

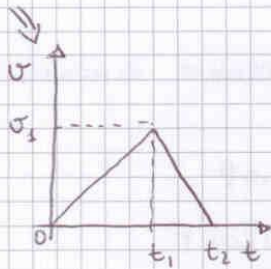
$$0 = v_1 + a_2(T - t_1) \Rightarrow T = v_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$$



Fisica

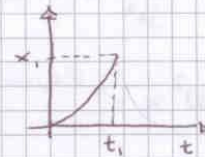
MECCANICA

VI Lezione
03/03/11

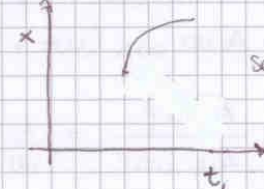


$$I) x(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$II) x(t) = x_1 + v_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2$$



PRIMO TRATTO



SECONDO TRATTO

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

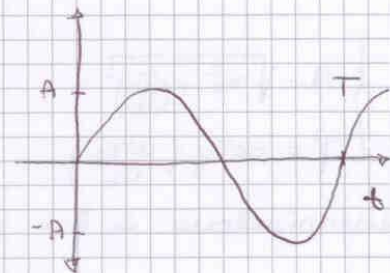
Lo spazio percorso è dato dall'area del triangolo base per altezza diviso due

MOTO ARMONICO

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{T} t_0\right)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

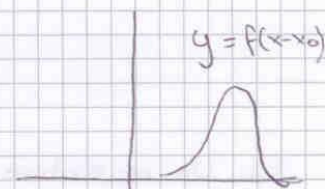
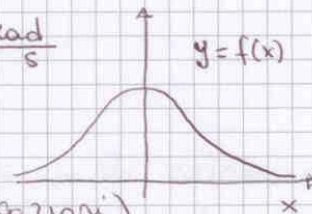


A = ampiezza

$$[A] = m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{frequenza} [\omega]$$

" $\frac{\text{rad}}{s}$ "



$$v = f = \frac{1}{T} \quad (\text{numero di oscillazioni al secondo})$$

$$[v] = s^{-1} = Hz$$

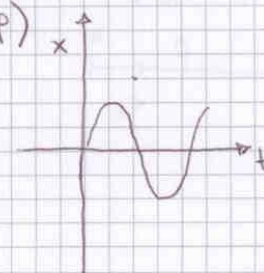
φ = fase iniziale

$$[\varphi] = \text{rad}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = 0$$



$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \rightarrow \text{Equazione differenziale dell'oscillatore armonico}$$

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

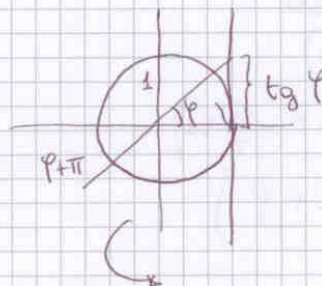
$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A \sin \varphi \\ v(0) = v_0 = A\omega \cos \varphi \end{cases}$$

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{A \sin \varphi}{A\omega \cos \varphi} = \frac{1}{\omega} \tan \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$\begin{cases} \frac{x_0}{A} = \sin \varphi \Rightarrow \frac{x_0^2}{A^2} = \sin^2 \varphi \\ \frac{v_0}{A\omega} = \cos \varphi \Rightarrow \frac{v_0^2}{A^2 \omega^2} = \cos^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \omega^2} = 1 \Rightarrow A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) \end{cases}$$

Indeterminate di A e φ



vedo il
coseno, se
il coseno è positivo
altrimenti sbia a sinistra

$$\tan(\varphi + \pi) = \tan \varphi$$

$$\frac{\sin(\varphi + \pi)}{\cos(\varphi + \pi)} = \frac{-\sin \varphi}{-\cos \varphi}$$

Indeterminazione
su A e su φ

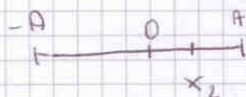
Es: un oscillatore armonico di $\omega = 1 \text{ rad/s}$ passa al $t = 0$ $\begin{cases} x_0 = 1 \text{ m} \\ v_0 = \sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$
Calcolare la massima accelerazione, la velocità $v(t)$, $x(t)$
 $v_2 = v$ per $x = x_2 = \frac{3}{2} x_0$ $t_1 = \pi/6 \text{ s}$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a_m = A\omega^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} (+\pi)$$



Fisica

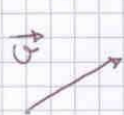
MECCANICA

VII edizione
11/03/11

GRANDEZZE SCALARI: unico numero con le relative unità di misura come ad esempio la temperatura

GRANDEZZE VETTORIALI: grandezze rappresentate da un vettore
Ex: forza

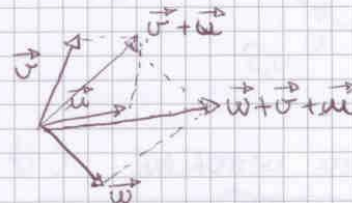
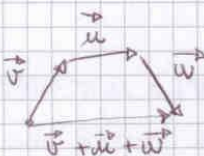
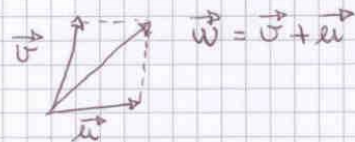
un vettore è un segmento orientato, dotato di una direzione e di un verso



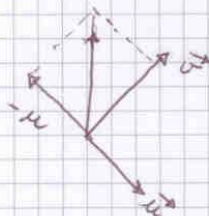
$$u = |\vec{u}| \text{ ovvero lunghezza}$$

$$|\hat{u}| = 1 \text{ versore}$$

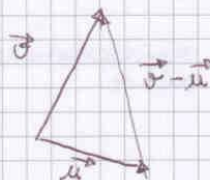
SOMMA TRA VETTORI:



DIFFERENZA TRA VETTORI



$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

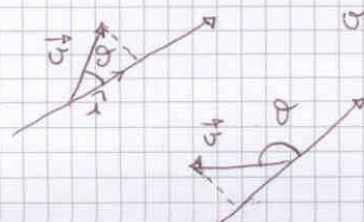


PRODOTTO SCALARE

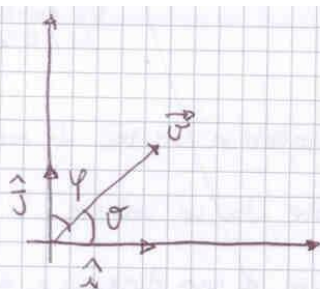


$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= uv \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 & \text{se } \theta &= \frac{\pi}{2} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= uv \cos \theta & \theta &= 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= -uv & \theta &= \pi \end{aligned}$$

→ proiezione:



$$v_i = \vec{v} \cdot \hat{u} = v \cos \theta$$



SCOMPONIZIONE VETTORI:

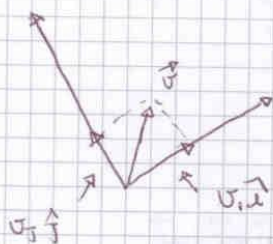
$$u_x = \vec{u} \cdot \hat{i} = u \cos \theta$$

$$u_y = \vec{u} \cdot \hat{j} = u \sin \theta$$

$$= u \cos \phi$$

$$\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$



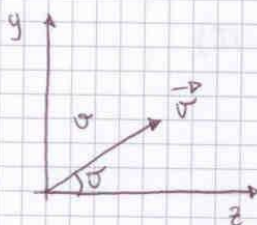
⚠ i prodotti scalari servono anche per calcolare le componenti di un vettore lungo un asse

PRODOTTO VETTORIALE $(\vec{u} \times \vec{v})$



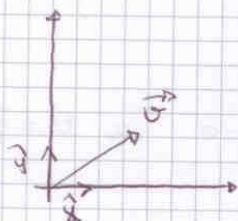
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \quad |\vec{w}| = uv \sin \theta$$

⚠ il prodotto vettoriale non è commutativo



$u, \theta \rightarrow$ coordinate polari

representazione polare



$$\left. \begin{aligned} u_x &= \vec{u} \cdot \hat{x} \\ u_y &= \vec{u} \cdot \hat{y} \end{aligned} \right\} \vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$$

(u_x, u_y) componenti cartesiane

Fisica

MECCANICA

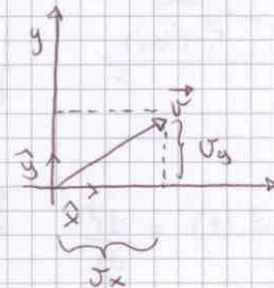
VII lezione
11/03/11

Come passare dalle componenti ^{cotenzore} polari a quelle ^{polari} cartesiane

$$\begin{cases} v_x = v \cos \theta \\ v_y = v \sin \theta \end{cases} \quad v, \theta$$

e viceversa

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \end{cases}$$



$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} \quad (v_x, v_y)$$

$$\rightarrow a\vec{v} = a(v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) = (av_x) \hat{x} + (av_y) \hat{y}$$

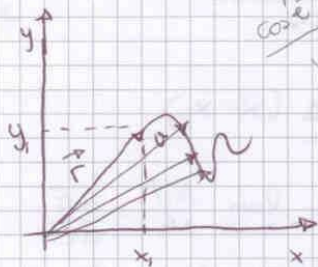
$$\rightarrow \vec{v} + \vec{u} = (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) + (u_x \hat{x} + u_y \hat{y}) = (v_x + u_x) \hat{x} + (v_y + u_y) \hat{y}$$

$$\rightarrow \vec{w} = \vec{v} \pm \vec{u} \Rightarrow (w_x, w_y) = (v_x \pm u_x, v_y \pm u_y)$$

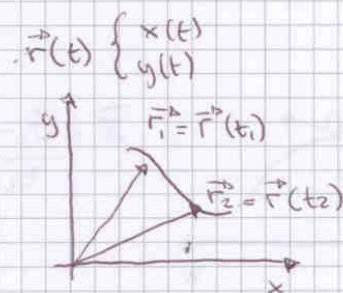
$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} &= (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \cdot (u_x \hat{x} + u_y \hat{y}) = \\ &= v_x u_x \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{x}}_1 + v_y u_x \underbrace{\hat{y} \cdot \hat{x}}_0 + v_x u_y \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{y}}_0 + v_y u_y \underbrace{\hat{y} \cdot \hat{y}}_1 = v_x u_x + v_y u_y \end{aligned}$$

$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \hat{x} \underbrace{(v_y u_z - u_y v_z)}_{w_x} + \hat{y} \underbrace{(u_x v_z - u_z v_x)}_{w_y} + \hat{z} \underbrace{(v_x u_y - v_y u_x)}_{w_z}$$

cos'è r?

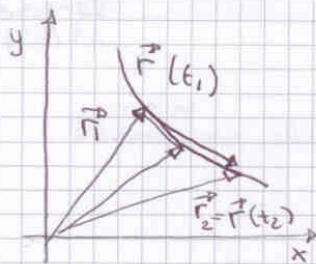


$$\vec{r} = (x, y)$$



$$\vec{v}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \rightarrow \text{mi dice inoltre in che direzione mi sto spostando}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

ie vettore velocità è in ogni punto tangente alla traiettoria

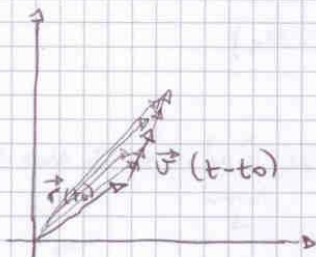
$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

III Sezione
14/03/11

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t') dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$



moto rettilineo uniforme

$$\vec{v}(t) = \text{costante}$$

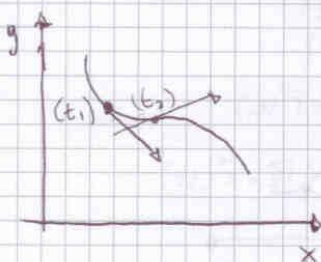
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v} \int_{t_0}^t dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0)$$

DETERMINIAMO LA TRAIETTORIA: (SAREBBE LA CURVA)

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t-t_0) \end{cases}$$

$$t-t_0 = \frac{x(t) - x(t_0)}{v_x} = y(t) + \frac{v_y}{v_x} [x(t) - x(t_0)]$$

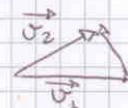


$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x} (x - x_0)$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

è accelerazione ci dà informazioni sulla variazione della velocità, in modulo direzione e verso

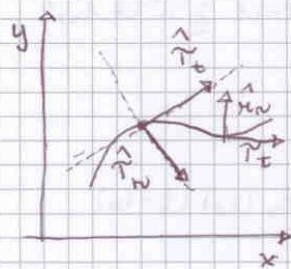
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$



Fisica

MECCANICA

VIII edizione
14/03/11



$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO INTRINSECO

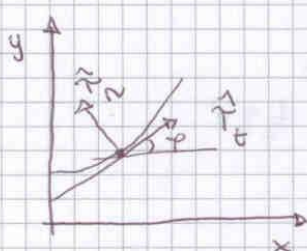
$\hat{e}_t$ e $\hat{e}_n$ sono dei versori

→ tangente alla traiettoria

→ verso positivo concorde con la concavità

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{e}_t(t)$$

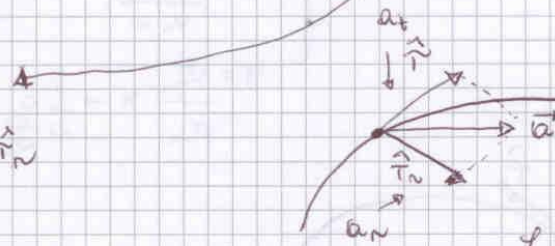
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [v(t) \cdot \hat{e}_t(t)] = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{e}_t + v \frac{d\hat{e}_t}{dt}$$



$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{e}_n$$

→ quando si calcola la derivata del versore $\hat{e}_t$ si deve disporre del seno

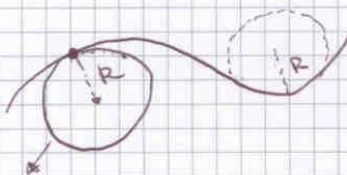
$$\underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{e}_t}_{a_t} + \underbrace{v \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_n}_{a_n}$$



φ è l'angolo tra la curva e la normale alla tangente alla traiettoria

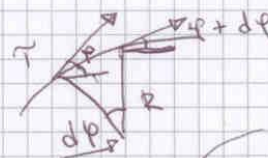
Espressione più pratica dell'accelerazione:

→ raggio della curvatura



cerchio osculatore

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{e}_t}_{a_t} + \underbrace{v \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_n}_{a_n = \frac{v^2}{R}}$$



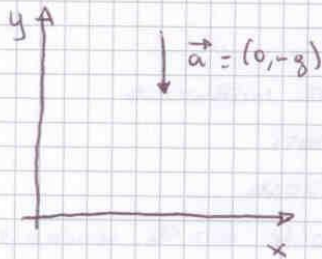
$$d\varphi = \frac{ds}{R} \rightarrow \text{variazione dell'angolo}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} v = \left(\frac{ds}{dt} \right) \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{v^2}{R} \\ a_t = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

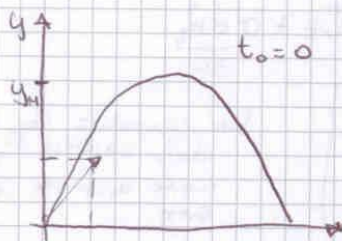
$$\vec{a} = \text{costante} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t-t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t-t_0)^2$$



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_x(t_0) \\ x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t-t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_y = -g \\ v_y(t) = v_y(t_0) - g(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{cases}$$

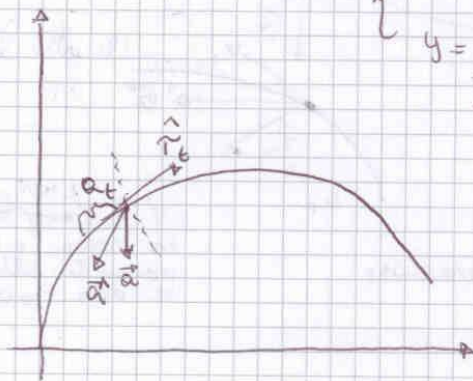


$$t_0 = 0 \quad \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x} = v_x(t_0) \\ v_{0y} = v_y(t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x(t)}{v_{0x}}$$

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$$



Fisica

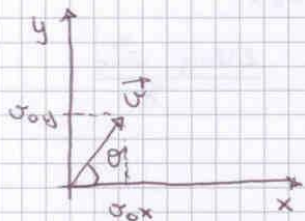
MECCANICA

IX Edizione
15/03/11

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x} \hat{x} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y} \hat{y}$$

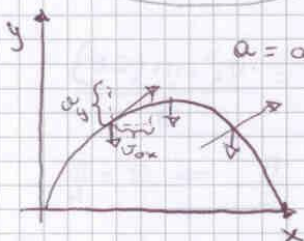
moti rettilinei: se R tende a infinito, $a_n = 0$

moti curvilinei



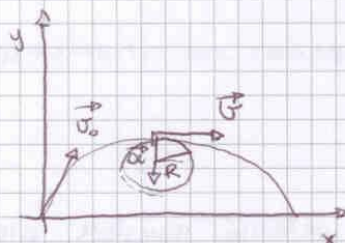
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \theta \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - g t \end{cases}$$



$a = \text{costante} \rightarrow$ cambia perché ma in realtà è costante

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

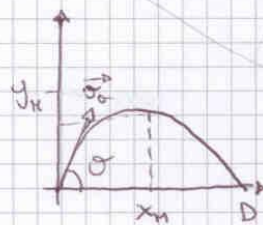
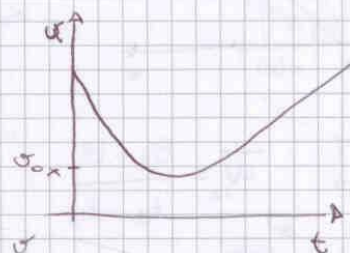


$$\begin{cases} a_n = g \\ v = v_{0x} \end{cases}$$

raggio di curvatura?

$$R = \frac{v^2}{g}$$

$$v(t) = \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - g t)^2}$$



$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

representa la traiettoria

$$y'(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g x}{v_{0x}^2} \Rightarrow$$

$$= 0 \quad x_M = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g}$$

$$y_M = y(x_M) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{0x}^2 v_{0y}^2}{g^2 v_{0x}^2} =$$

$\Rightarrow$

$$x(t) = a \sin(bt) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad t=T \Rightarrow bt = 2\pi \quad b = \frac{2\pi}{T}$$

Moto smorzato:



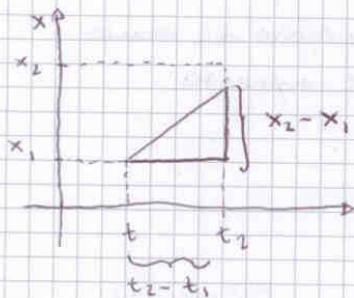
$$x = x_0 e^{-bt}$$

$$t=T \Rightarrow x(T) = x_0 e^{-1}$$



Velocità media

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad [v] = \text{m/s}$$



$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{dx}{dt}(t_1)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

representa istantaneamente
la velocità

Es

$$x(t) = \alpha t^{1/3}$$

$$t_0 = 1 \text{ s}$$

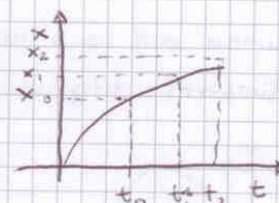
$$x_0 = x(t_0) = 2 \text{ m}$$

$$t = t_1 = 2 \text{ s}$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x_0}{t_0^{1/3}} = 2 \text{ m s}^{-1/3}$$

$t_2(\text{s})$	$x_2(\text{m})$	$x_2 - x_1(\text{m})$	$t_2 - t_1(\text{s})$	$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_2$
4				0,3275
3				0,3647
2,5				
2,1				
2,05				
2,01				
2,001				0,499



$$x = \alpha t^{1/3}$$

$$x_1 = \alpha t^{1/3} \approx 2,5198$$

Sorgente : <http://holisi.hasanaj.com/>

Autore : Holsi Hasanaj

Professore: Santarsiero

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre

Anno di produzione: 2010-2011

$$y_M = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$D = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}$$

$$D = 2x_M$$

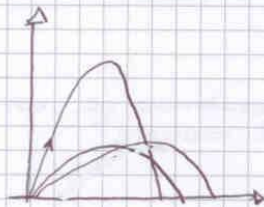
$$y(x) = 0$$

$$0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

$$\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x$$

$$\frac{1}{2} g x = \frac{2v_{0y} \cdot v_{0x}}{g}$$

MOTO DEL PROIETTILE

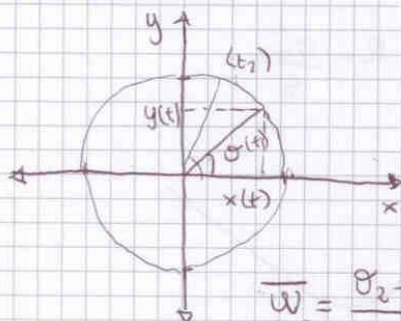


$$D = \frac{2v_0 \cos\theta v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

$$D_{MAX} = \frac{v_0^2}{g} \text{ per } 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

(miglior miglior con percorso migliore)

MOTO CIRCOLARE



velocità
angolare media

$$\overline{\omega}_{12} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

equazione circonferenza

$$x, y \rightarrow R, \theta$$

costante

velocità angolare istantanea

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

$$[\omega] = \text{rad/s}$$

→ moto circolare uniforme

$\omega = \text{costante}$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \overline{\alpha}_{12}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

$$[\alpha] = \text{rad/s}^2$$

$\alpha = \text{costante}$

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0)$$

Fisica

MECCANICA

IX sezione

15/03/11

$$2d(\theta_2 - \theta_1) = \omega_2^2 - \omega_1^2$$

a quota nulla

Un proiettile viene sparato con angolo di alzo $\theta = 60^\circ$ determinare la velocità iniziale da imprimere al proiettile affinché colpisca un oggetto situato alla distanza D . Il bersaglio si trova dietro un muro alto h situato alla distanza d . Si determini se il proiettile colpisce o meno il bersaglio.

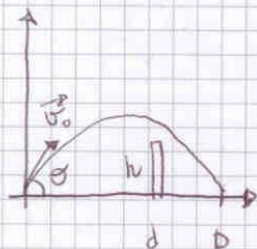
θ, D, h, d

$\theta = 60^\circ$

$D = 30\text{ m}$

$h = 12\text{ m}$

$d = 20\text{ m}$

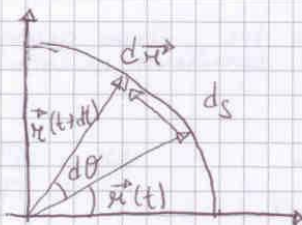


$$D = -v_{0y} \sin \theta - g t$$

$$D = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \Rightarrow v_0^2 = \frac{g D}{\sin(2\theta)} \approx 18,4$$

$y(d) > h$
11,5

$\Rightarrow$ Calcolare l'arco minimo



$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) \approx ds \hat{t}_t = R d\theta \hat{t}_t$$

$$ds = R d\theta$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{R d\theta}{dt} \hat{t}_t = R \frac{d\theta}{dt} \hat{t}_t = R \omega \hat{t}_t$$

$$\vec{a} = a_t \hat{t}_t + a_n \hat{t}_n$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \alpha(t)$$

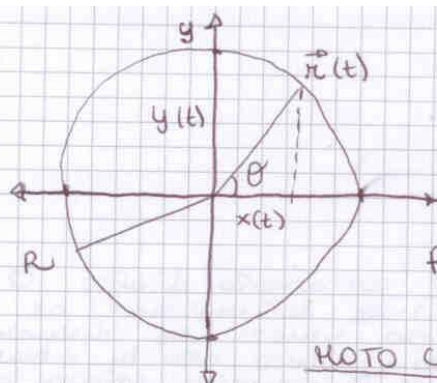
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = \omega^2 R = R \omega^2(t) \rightarrow \text{MOTO ARCOLARE GENERALIZZATO}$$

MOTO ARCOLARE UNIFORME

$$a_t = 0$$

$$a_n = \omega^2 R$$

↑
costante



$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\theta(t)) = R \sin(\theta(t) + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = R \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

$$R = |\vec{r}(t)|$$

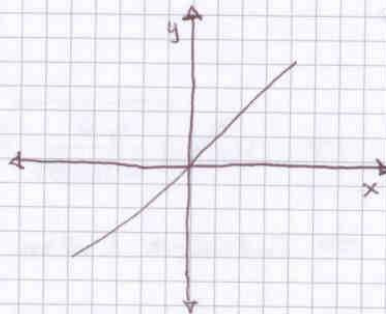
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(t_0) + \omega(t - t_0) \\ &= \theta_0 + \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

se $\theta_0 = 0$

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t) \\ y = R \sin(\omega t) \end{cases}$$



Es: Le lancette di un orologio indicano le tre dopo quanto tempo l'ora e la lancetta delle ore saranno ancora ad angolo retto?



$$(h) \quad \theta_h(t) = -\omega_h t$$

$$(m) \quad \theta_m(t) = \frac{\pi}{2} - \omega_m t$$

$$\omega_h = \frac{2\pi}{T_h}$$

$$T_h = 12h$$

$$\theta_h(t) - \theta_m(t) = \frac{\pi}{2} + K\pi$$

$$t=0 \quad \theta_h(0) - \theta_m(0) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad K = -1$$

$$t^* = ? \quad n=0 \quad \theta_h(t^*) - \theta_m(t^*) = -\omega_h t^* - \left(\frac{\pi}{2} - \omega_m t^*\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega_m t^* - \omega_h t^* = \pi$$

$$(\omega_m - \omega_h) t^* = \pi \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_m} - \frac{2\pi}{T_h} \right) t^* = \pi$$

$$\left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_h} \right) t^* = \frac{1}{2} \quad \frac{t^*}{T_h} \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2}$$



Fisica

MECCANICA

IX lezione

16/03/11

$$\Rightarrow \frac{1}{12} \frac{t^*}{T_m} = \frac{1}{2}$$

$$t^* = T_m \frac{1}{2} \frac{12}{11} = \frac{6}{11} T_m$$

$$t = 19645 s$$

Ex:

Un punto materiale si muove lungo su una traiettoria circolare

$$\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = -0,5 \text{ rad/s}^2$$

n di giri?

$$\omega_f^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(x - x_0)$$

$$\frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = x$$

15,9 giri

X lezione
27/03/11
lezione di calcolo
re fondamentali

DINAMICA

studia le cause del moto

→ LE FORZE: studiano i principi della dinamica, misurano l'interazione dei corpi

Es. studio della dinamica si fonda su tre principi

1) PRINCIPIO D'INERZIA: un corpo materiale libero da qualunque interazione lo stato di questo oggetto sarà rettilineo uniforme → PRINCIPIO DI GALILEO

RELATIVITÀ: Galileo descrive un esperimento concettuale → all'interno della nave che viaggia con un moto rettilineo uniforme, se una persona a bordo della nave lancia un oggetto non si accorgerebbe mai se la nave fosse in movimento o meno

→ Secondo Galileo non si può stabilire chi è veramente in movimento → perché i moti hanno senso solamente nei confronti di altri oggetti

Es. STATO DI QUIETE: secondo questa teoria lo stato di quiete, è lo stato di moto rettilineo uniforme sono la stessa cosa visti da due punti di vista diversi

1) un punto materiale non soggetto a forze rimane o in quiete o in movimento

→ i sistemi accelerati non soddisfano i principi d'inerzia

2) PRINCIPIO (2° LEGGE DI NEWTON)

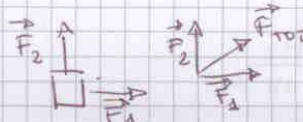
Forze sono dei vettori che misurano l'interazione tra i corpi

→ dinamometro, misura la forza



$$\vec{F} \propto \vec{a}$$

significa proporzionale



$$\vec{F}_{tot} = m \vec{a} = [Kg] [m/s^2] = [F] = [N] \text{ newton}$$

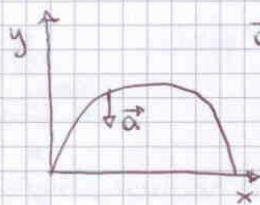
↳ fattore di proporzionalità → massa inerziale

MASSA INERZIALE : è un qualcosa che tende a resistere alla forza applicata.

3) PRINCIPIO (3° LEGGE DI NEWTON) : ogni azione provoca una reazione uguale e contraria

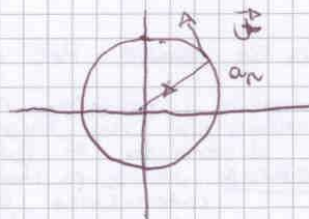
$$\begin{array}{c} (1) \\ \leftarrow \vec{F}_{21} \end{array} \quad \begin{array}{c} (2) \\ \rightarrow \vec{F}_{12} \end{array} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} \Rightarrow |\vec{a}| = \left| \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \right|$$



$$\vec{a} = (0, -g)$$

$$\vec{F}_{tot} = (0, -mg)$$



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

forza diretta verso il centro

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{tot}}{m}$$

→ CONDIZIONI DI EQUILIBRIO : si ha l'equilibrio di un corpo quando la risultante delle forze agenti su di esso è uguale a 0

4 TIPI DI FORZE

- 1) - INTERAZIONE NUCLEARE DEBOLE
 - 2) - INTERAZIONE NUCLEARE FORTE
 - 3) - FORZA GRAVITAZIONALE
 - 4) - FORZA ELETTROMAGNETICA
- INTERAZIONI SUB-ATOMICHE
COESIONE DEL NUCLEO

FORZA GRAVITAZIONALE

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad \text{forza attrattiva}$$

$$m_1 \xrightarrow{\vec{F}_{12}} \quad m_2 \xleftarrow{\vec{F}_{21}}$$

$$[G] = N \cdot m^2 / Kg^2$$

$$G \approx 6,7 \cdot 10^{-11} N m^2 / Kg^2$$

TEOREMA di GAUSS : ci dice che la massa di un oggetto può essere considerata come concentrata tutta nello stesso punto

$$r \ll R$$

$$F_{12} = \frac{G M M_T}{(R_T + h)^2}$$

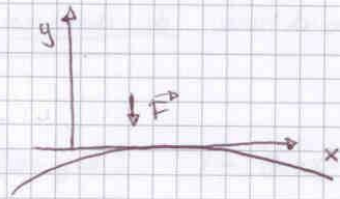
$$M_T \approx 6 \cdot 10^{24} Kg$$

$$R_T \approx 6,4 \cdot 10^6 m$$

Fisica

MECCANICA

X Lezione
21/03/11



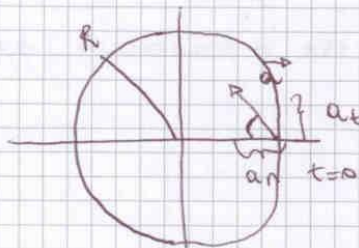
IL PESO È UNA FORZA: la forza con cui la terra attrae i corpi verso di sé.

MASSA → inerzia al moto

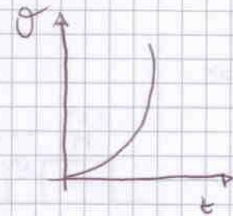
ES1: (CINEMATICA MOTO CIRCOLARE)

Un p.to materiale che si muove su una circonferenza con una certa equazione oraria $\theta(t) = \beta t^3$

Calcolare l'angolo che il vettore accelerazione forma con l'asse x

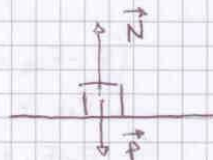


$$\tan \varphi = \frac{a_t}{a_n}$$



R definizione dei simboli non presenti nel testo

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = m\vec{a}$$



$$\vec{a} = 0 \Rightarrow$$

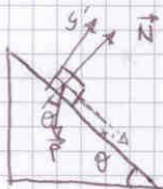
$$\vec{F}_{\text{TOT}} = 0 = \vec{P} + \vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

$$\vec{N} = mg$$

$\vec{N}$ e $\vec{P}$ non costituiscono azione e reazione

l'azione-reazione invece si ha con la terra e non con le tavole



y)

$$a_{y'} = 0 \Rightarrow F_{y'}^{\text{TOT}} = 0 = N_{y'} + P_{y'} = 0$$

$$N - P \cos \theta = 0$$

$$N = P \cos \theta$$

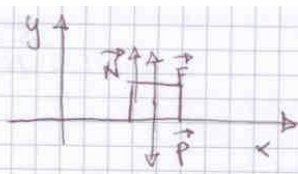
x) $F_{x'}^{\text{(TOT)}} = m a_{x'}$

$$N_{x'} + P_{x'} = m a_{x'}$$

$$P_{x'} = P \sin \theta$$

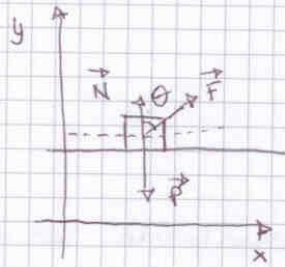
$$mg \sin \theta = m a_{x'} \Rightarrow a_{x'} = g \sin \theta$$

θ è l'angolo che la normale forma con la forza peso



$$N + F - P = 0 \quad N = P - F$$

Cercare la condizione di distacco significa $N = 0$

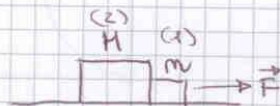


$$y) F_y^{(tot)} = N + F \cos \theta - P \quad (a_y = 0) \quad N = P - F \cos \theta$$

$$x) F_x^{(tot)} = F \sin \theta = m a_x \quad a_x = \frac{F}{m} \sin \theta$$

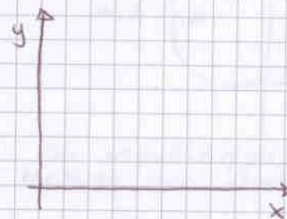
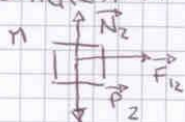
nelle condizioni di distacco $N = 0 = P - F \cos \theta$
 $\Rightarrow P = F \cos \theta$

Ex:



Calcolare le forze che si scambiano i due blocchi.

- DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO



$$1) x: F - F_{12} = m a_1$$

$$y: N_1 - P_1 = 0 \Rightarrow N_1 = P_1$$

$$2) x: F_{12} = H a_2$$

$$y: N_2 - P_2 = 0 \Rightarrow N_2 = P_2$$

$$a_1 = a_2 = a$$

$$F_{12} = \frac{H}{H+m} F = \frac{1}{1+\frac{m}{H}} F$$

$$\begin{cases} F - F_{12} = m a_1 \\ F_{12} = H a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F - F_{12} + F_{12} = (H+m)a \Rightarrow F = (H+m)a$$

$$a = \frac{F}{H+m}$$

METODO ALTERNATIVO:

$$x) F = (H+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{H+m}$$



$$F_{12} = H a = \frac{H}{H+m} F$$



$$F - F_{12} = m a$$

$$\frac{m}{H} \ll 1 \Rightarrow F_{12} \approx F$$

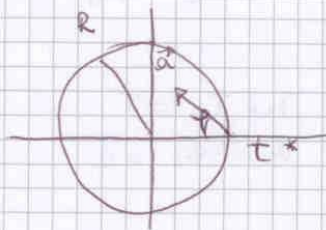
casi limite

Fisica

MECCANICA

XI lezione
22/03/11

E3.1



$$\theta(t) = \beta t^3$$

$$\tan \varphi = \frac{a_t}{a_n}$$

$$\theta(t^*) = 2\pi$$

$$\beta t^{*3} = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\beta}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \omega R$$

$$\hookrightarrow \frac{d\omega}{dt} = 3\beta t^2 R \Rightarrow a_t = \frac{d\omega}{dt} R = 6\beta t^2 R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3\beta t^2 R)^2}{R} = 9\beta^2 t^4 R$$

$$\tan \varphi = \frac{6\beta t^2 R}{9\beta^2 t^4 R} = \frac{2}{3\beta t^2} \quad \text{per un generico } t$$

$$\hookrightarrow t = t^* \Rightarrow \frac{a_t}{a_n} = \frac{2}{3\beta t^{*2}} = \frac{2\beta}{3\beta 2\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

$$\varphi = 6,06^\circ$$

XII lezione
24/03/11



La massa del filo ideale è trascurabile

$\hookrightarrow$ la forza si trasferisce dall'altro capo

il filo ideale è inestensibile



$$F - F_{21} = ma$$

CASI UNICI

$$1) m \ll M \Rightarrow \frac{m}{M} \ll 1$$

$$F_{21} = F$$

(forza trasferita)

① la forza trasferita attraverso un filo è chiamata Tensione (T)

ATWOOD

$$1) T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

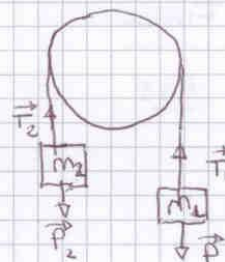
$$2) T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

$$P_1 = m_1 g$$

$$T_1 = T_2 = T$$

$$a_1 = -a_2 = a$$



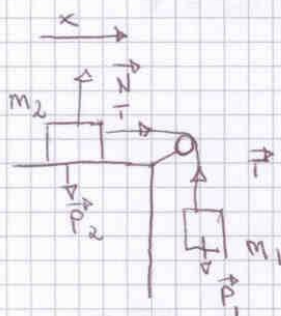
$$\rightarrow T - m_1 g - T + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_2 - m_1)g = (m_2 + m_1)a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

$$m = m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{cases} T = mg \\ a = 0 \end{cases}$$

Se le masse sono uguali: due corpi in condizioni ideali di attrito nullo, oppure si muoverebbero con la stessa velocità all'infinito.



$$N = m_2 g$$

$$T = m_2 a_2 = m_2 a$$

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

$$(a_1 = a_2 = a)$$

$$\begin{cases} T = m_2 a \\ m_1 g - T = m_1 a \end{cases}$$

$$\text{Voglio sapere l'accelerazione} \rightarrow T + m_1 g - T = m_1 a + m_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$

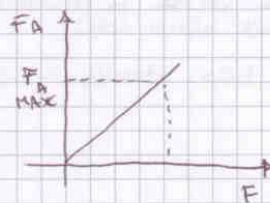
ATTRITO RADENTE STATICO



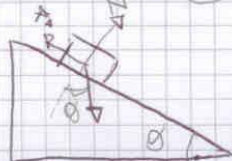
$$F_A = F$$

Per forze maggiori a $F_{A \max}$ si ha

un attrito radente dinamico



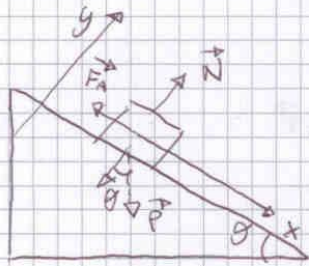
$$F_A^{(\max)} = N \mu_s \rightarrow \text{ATTRITO RADENTE STATICO}$$



Fisica

MECCANICA

XII Lezione
24/03/11



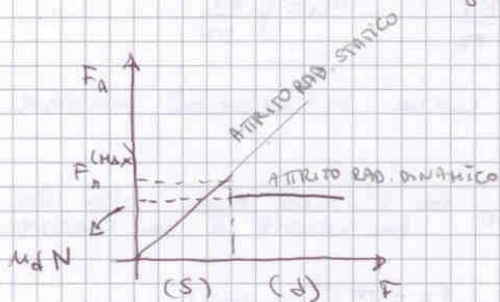
$$y) N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$x) mg \sin \theta - F_A = 0 \Rightarrow F_A = mg \sin \theta$$

$$F_A = mg \sin \theta \leq F_A^{(max)} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq \mu_s$$

$$\tan \theta \leq \mu_s \rightarrow \text{cosa significa che } \tan \theta \leq \mu_s?$$



$$F_A = \mu_d N$$

$$\mu_d \leq \mu_s$$

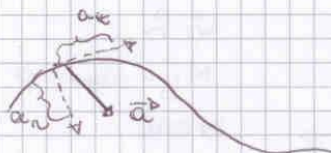
ora e' oggetto in muovere

$$y) N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$x) mg \sin \theta - F_A = m a_x \Rightarrow mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = m a_x \Rightarrow$$

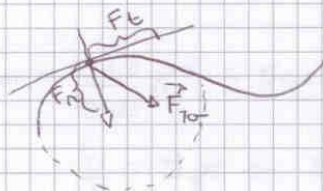
$$a_x = g (\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

XIII Lezione
25/03/11



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$



F_n è detta forza centripeta

$$F_n = \frac{m v^2}{R}$$



$v = \text{costante}$

Fisica

MECCANICA

II Sezione

3/03/11

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} t^{-2/3} \Rightarrow v(t_1) = 0,419974 \text{ m/s}$$

MOTO RETILINEO UNIFORME

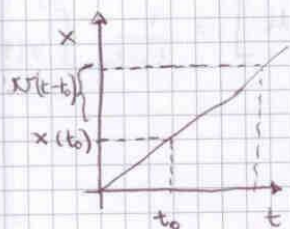
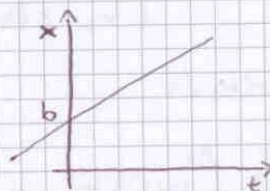
III Sezione

4/03/11

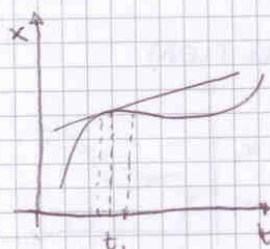
$$v(t) = \text{costante}$$

$$x(t) = vt + b$$

$$x(0) = b$$



$$x(t) = x(t_0) + v(t - t_0)$$



velocità istantanea

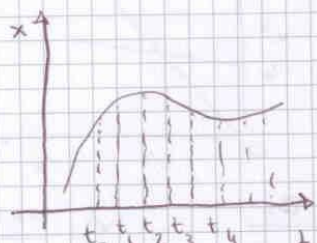
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)]$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx = x(t_2) - x(t_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

OSSERVAZIONE:

$v = \frac{dx}{dt}$ non è un rapporto ma è il limite di un rapporto
 (dal punto di vista pratico è uguale)



$$x(t_1) \approx x(t_0) + v(t_0) (t_1 - t_0)$$

$$x(t_2) \approx x(t_1) + v(t_1) \cdot (t_2 - t_1) =$$

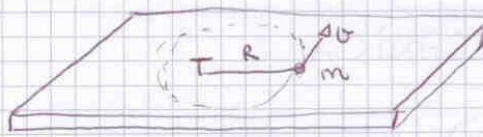
$$= x(t_0) + v(t_0) (t_1 - t_0) + v(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$$

$$x(t_3) \approx x(t_2) + v(t_2) (t_3 - t_2) = x(t_0) + v(t_0) \Delta t_0 + v(t_1) \Delta t_1 + v(t_2) \Delta t_2$$

$$= x(t_0) + v(t_0) \Delta t_0 + v(t_1) \cdot \Delta t_1 + v(t_2) \cdot \Delta t_2$$

$$x(t_n) \approx x(t_0) + \sum_{n=0}^{n-1} v(t_n) \cdot \Delta t_n$$

il limite per $n \rightarrow \infty$ di questo sommatorio
 è proprio l'integrale



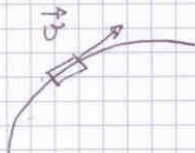
$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{T}$$

$$T = F_n = \frac{m v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{RT}{m}}$$

$$v_H = \sqrt{\frac{RT}{m}}$$

Es un'automobile percorre una curva con velocità costante $\vec{v}$



è l'unico caso che la forza centripeta è l'attrito.

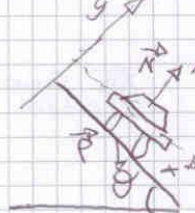
$$F_n = \frac{m v^2}{R} \leq \mu_s N = \mu_s m g$$



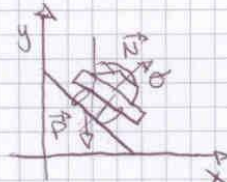
$$F = m a \leq \mu_s m g = \mu_s N$$

$$v \leq \sqrt{\mu_s R g}$$

La forza normale non è sempre uguale alla forza peso



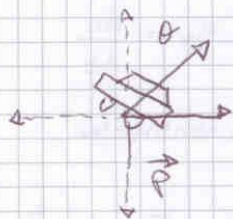
in assenza di attrito



$$v, R$$

$$N_y - m g = 0$$

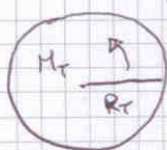
$$N \cos \theta$$



$$F_n = \frac{m v^2}{R} = N \sin \theta = m g \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = m g \tan \theta$$

$$\frac{m v^2}{R} = m g \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{R g}$$

DATELITE GEOSTAZIONARIO



$$F = \frac{G M_T m}{d^2}$$

$$d = R_T + h$$

$$F = \frac{m v^2}{R d}$$

$$\frac{G M_T m}{d^2} = \frac{m v^2}{d} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_T}{d}}$$

Fisica

MECCANICA

XIV lezione
25/03/11

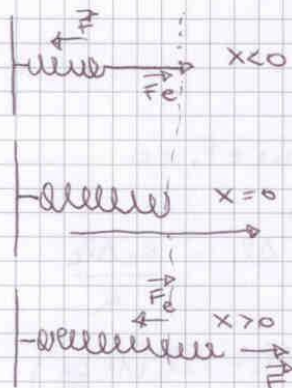
$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{d}} = \frac{2\pi d}{T}$$

$$\frac{GM_T}{d} = \frac{4\pi^2 d}{T^2} \Rightarrow d^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

$$d = R_T + h = 36.000 \text{ Km}$$

MOLE



LEGGE DI HOOKE

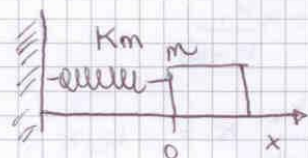
$$F_e(x) = -Kx$$



K prende il nome di costante elastica

$$[K] = \text{N/m}$$

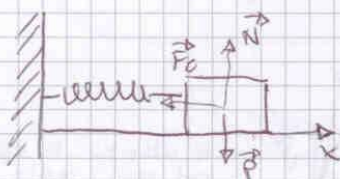
Co rappresenta la rigidità della molla



$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$$

$$y) = N - P = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$x) -Kx = ma \quad a_x = -\frac{K}{m}x$$



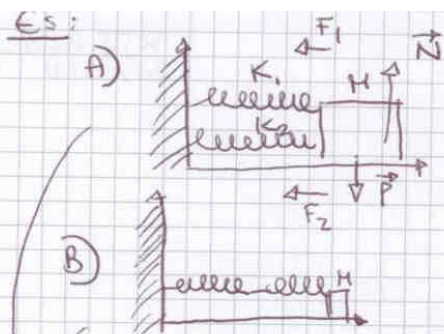
$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

A è la massima ampiezza
↳ allungamento della molla

28/03/11



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

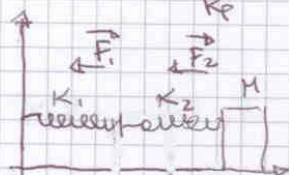
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

$$X: F_{TOT} = F_1 + F_2 = -K_1 x - K_2 x = -(K_1 + K_2)x = -K_p x = F_{TOT}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K_p}}$$

$$K_p = K_1 + K_2 > \max(K_1, K_2)$$



su corpo

$$X: F_2 = -K_2 \Delta l_2$$

su (K_2)

$$F_1 = -K_1 \Delta l_1$$

$$\text{su molla 2: } F_{TUS} = F_{M2} + F_1 = 0$$

$$-F_2 + F_1 = 0 \quad F_2 = F_1$$

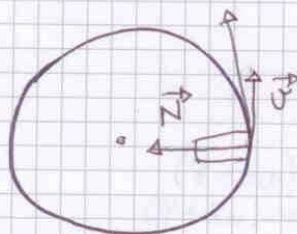
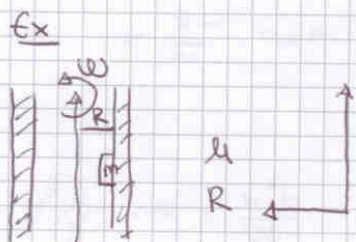
$$K_2 \Delta l_2 = K_1 \Delta l_1 \quad \Delta l_1 = \frac{K_2 \Delta l_2}{K_1}$$

$$X = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{K_2}{K_1} \Delta l_2 + \Delta l_2 = \Delta l_2 \left(1 + \frac{K_2}{K_1}\right)$$

$$X = \Delta l_2 \frac{K_1 + K_2}{K_1} \Rightarrow \Delta l_2 = X \frac{K_1}{K_1 + K_2}$$

$$F_2 = -K_2 \frac{K_1}{K_1 + K_2} X = -\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} X = -K_s X$$

$$K_s = 2K_1$$



l'atrito si oppone ad ogni moto

$$y: F_A - mg = 0$$

$$x: N = m a_m = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$$

$$F_A \leq F_A^{(max)} = \mu N$$

$$mg \leq \mu m \omega^2 R$$

FISICA

MECCANICA

28/03/11

~~XV~~ lezione

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu R}$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = \omega_{\min} = \sqrt{\frac{9,8}{1,5 \cdot 0,6}} \approx 3,3 \text{ rad/s}$$

Ex

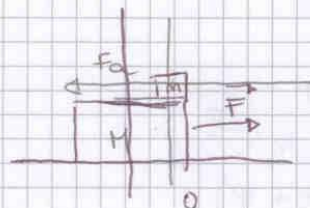
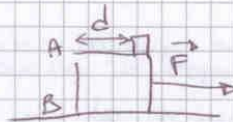
$$M = 50 \text{ Kg}$$

$$m_1 = 10 \text{ Kg}$$

$$d = 0,5 \text{ m}$$

$$F = 100 \text{ N}$$

$$\Delta t_1 = 2 \text{ s}$$



su m: $F_A = m a_m$

" $\mu m g = m a_m$

su M: $F + F_{Am} = F - F_A = M a_M$

$$x_m(t) = \frac{1}{2} a_m t^2$$

$$x_M(t) = \frac{1}{2} a_M t^2$$

$$F - F_A = M a_M$$

$$F - \mu m g = M a_M$$

$$\frac{F - \mu m g}{M} = a_M$$

$$x_M(t_1) - x_m(t_1) = 0$$

$$d = \frac{1}{2} a_M t_1^2 - \frac{1}{2} a_m t_1^2 = \frac{1}{2} (a_M - a_m) t_1^2$$

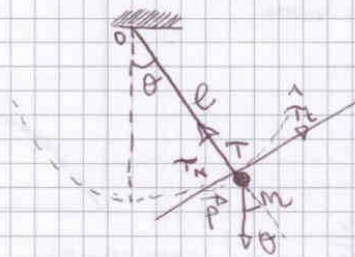
$$a_M = \frac{F - \mu m g}{M}$$

$$a_M - a_m = \frac{2d}{t_1^2} \Rightarrow \left(\frac{F}{M} - \frac{m}{M} \mu g \right) - \mu g = \frac{2d}{t_1^2}$$

$$\frac{F}{M} - \frac{2d}{t_1^2} = \frac{m}{M} \mu g + \mu g = \mu g \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

PENDOLO

SEMPLICE



29/03/11

~~XVI~~ lezione

massa puntiforme e in condizioni ideali

$$\sigma(t) = \vec{F}_{TOT} = m \vec{a}$$

$$\begin{cases} F_t = -p \sin \theta = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d}{dt}(v e) \\ F_N = T - p \cos \theta = \frac{m v^2}{r} \end{cases}$$

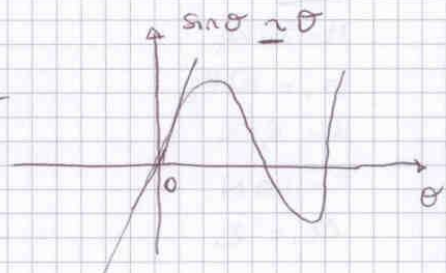
$$F_t = -p \sin \theta = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d}{dt}(v e) = m e \frac{dv}{dt} = m e \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -m g \sin \theta$$

$$\Rightarrow F_n = T - p \cos \theta = \frac{mv^2}{l} = \frac{m}{l} (v\omega)^2 = m\omega^2 l = T - mg \cos \theta$$

$$T = m\omega^2 l + mg \cos \theta$$

$$m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

approssimiamo questo curva
col suo sviluppo di primo
ordine
→ quindi ad una
retta



$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$$

$$\theta(t) = \theta_H \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \theta_H \cos(\Omega t + \varphi)$$

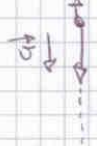
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\Omega^2 \theta_H \sin(\Omega t + \varphi) = -\frac{g}{l} \theta_H \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\Omega^2 = +\frac{g}{l} \quad \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad \text{! il periodo non dipende dalla massa}$$

ISOCRONISMO DEL PENDOLO. → osservato da Galileo, il periodo dipende da g e da l

FORZE DI ATTRITO VISCOSO

FWID: o gas o liquido



$$\vec{F}_A = -b\vec{v}$$

$$bv = mg$$

$$v = \frac{mg}{b} = v_L$$

$$F_{tot} = mg - bv = ma$$

$$a = g - \frac{b}{m} v = g - \frac{v}{\tau}$$

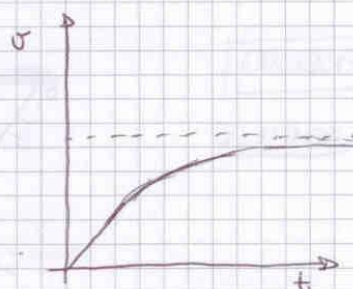
$$\tau = \frac{m}{b}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{\tau}$$

$$\frac{dv}{g - \frac{v}{\tau}} = dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{v}{\tau}} = \int_0^t dt$$

$$\vec{F}_A = -b\vec{v}$$



separazione delle variabili:

$$dv = \left(g - \frac{v}{\tau}\right) dt$$

Fisica

MECCANICA

XVI Edizione
29/03/11

$$-\tau \log \left(g - \frac{v}{\tau} \right) \Big|_{v_0}^{v(t)} = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{v}{\tau}} = \int_0^t dt = t$$

$$-\frac{t}{\tau} = \log \left(g - \frac{v(t)}{\tau} \right) - \log \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) =$$

$$-\frac{t}{\tau} = \log \frac{g - \frac{v(t)}{\tau}}{g - \frac{v_0}{\tau}} \Rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{g - \frac{v(t)}{\tau}}{g - \frac{v_0}{\tau}} \Rightarrow \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) e^{-t/\tau}$$

$$= g - \frac{v(t)}{\tau} \quad \Downarrow \quad e^{-t/\tau} \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) = g - \frac{v(t)}{\tau}$$

$$\begin{cases} v(0) = v_0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = g\tau = \frac{mg}{b} = v_2 \end{cases} \quad ?$$

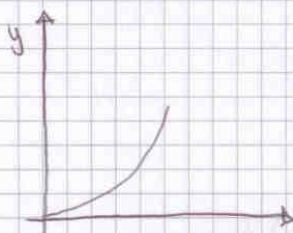
$$v_0 = 0 \Rightarrow v(t) = v_2 (1 - e^{-t/\tau})$$

$$v_L = g\tau = \frac{mg}{b}$$

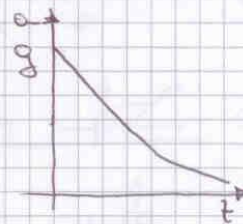
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v_L}{\tau} = g e^{-t/\tau}$$

$$v_L = g\tau$$

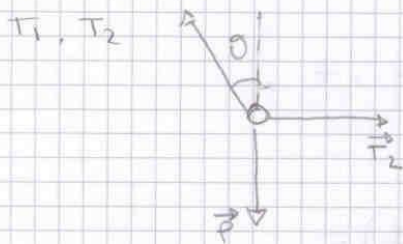
$$y(t) = \underbrace{y(0)}_0 + \int_0^t v(t') dt'$$



$$t \ll \tau \quad \approx \frac{1}{2} g t^2$$



Es: Un p.to materiale di massa m , è vincolato mediante i fili



$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a} = 0$$

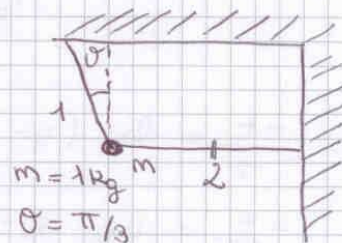
$$x) T_2 - T_1 \sin \theta = 0$$

$$y) T_1 \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow \frac{mg}{\cos \theta} = T_1$$

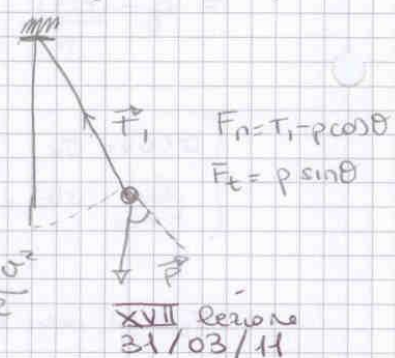
$$T_2 = T_1 \sin \theta = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = mg \tan \theta$$

$$\begin{cases} F_n = T_1 - p \cos \theta = \frac{mv^2}{r} = 0 \\ F_t = p \sin \theta \end{cases}$$

$$T_1 = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{r}$$



Si costringe la tr. immediatamente dopo il taglio del filo 2



Lavoro motore

$$W_{AB} > 0$$



$$F_x = F \cos \theta$$

$$W_{AB} = F_x \cdot (x_B - x_A)$$

$$[W] = N \cdot m = J \text{ (Joule)}$$

$$W_{AB} < 0$$



lavoro resistivo

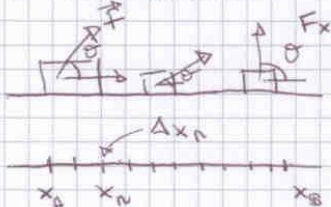
$$W_{AB} = 0$$



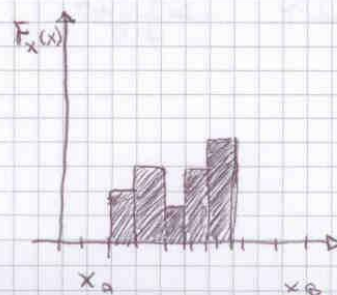
lavoro nullo

Es:

Forza non costante



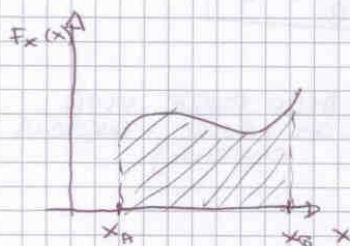
$$\Delta W_n = F_x(x_n) \Delta x_n$$



Fisica

MECCANICA

XVII lezione
31/03/11

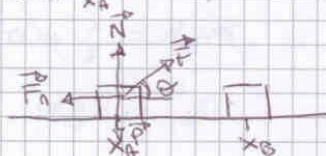


$$\sum_{n=1}^N F_x(x_n) \Delta x_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{x_A}^{x_B} F_x(x) dx = W_{AB}^{(F)}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$W_{AB}^{(tot)} = \int_{x_A}^{x_B} F_x^{(tot)}(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{i=1}^N F_x^{(i)}(x) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{x_A}^{x_B} F_x^{(i)}(x) dx = \sum_{i=1}^N W_{AB}^{(i)}$$



moto rettilineo uniforme significa che la forza risultante è uguale a 0

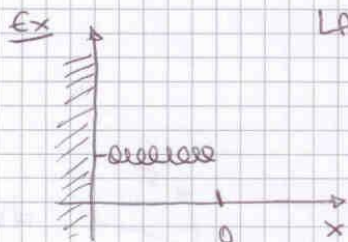
$$\vec{F}_{tot} = 0$$

Il lavoro della somma di tutte le forze è uguale alla somma dei lavori

↳ proprietà che deriva dall'integrale



$$W_{AB}^{(F)} = \int_{y_A}^{y_B} -mg dy = -mg y \Big|_{y_A}^{y_B} = mg(y_A - y_B) = mgh$$

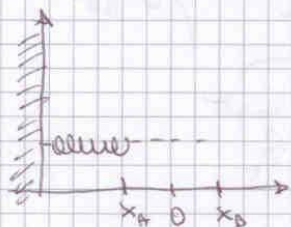


LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA ELASTICA

$$W_{AB}^{(e)} = \int_{x_A}^{x_B} (-Kx) dx = -K \int_{x_A}^{x_B} x dx = -K \frac{x^2}{2} \Big|_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2} K (x_A^2 - x_B^2)$$

$$F_e(x) = -Kx$$

$$x_A^2 = x_B^2 \Rightarrow |x_A| = |x_B|$$



$$\vec{F}_{TOT} =$$

$$W_{AB}^{(tot)} = \int_{x_A}^{x_B} F_x^{(tot)}(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} m a_x dx =$$

$$= m \int_{x_A}^{x_B} a_x(x) dx = m \int_{v_A}^{v_B} v_x dv = m \frac{1}{2} v^2 \Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

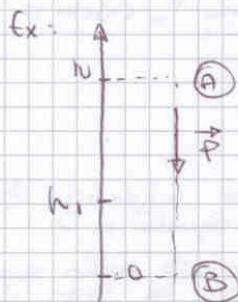
$$W_{AB}^{(tot)} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE.
(DEL LAVORO - ENERGIA CINETICA)

$$m \int_{x_1}^{x_2} a(x) dx = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) m$$



$$W_{AB}^{tot} = mgh$$

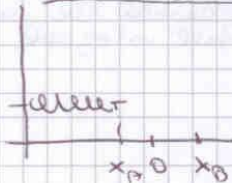
$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B^2 = 2gh$$

Ex: OSCILLATORE ARMONICO



$$W_{AB}^{(tot)} = \frac{1}{2} k (x_A^2 - x_B^2)$$

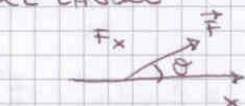
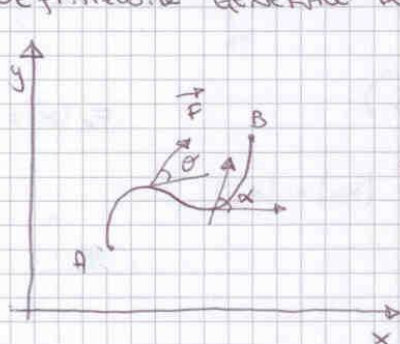
$$\text{Se } v_A = 0$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} k (x_A^2 - x_B^2)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m} (x_A^2 - x_B^2)}$$

DEFINIZIONE GENERALE DEL LAVORO



Se la forza è costante e anche se $\vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$dW = F ds \cos \theta$$

$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{t}$$

$$W_{AB}^{(F)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Integrali di linea

compone le vettore sulla curva funzione da integrare che A se differenziale

Fisica

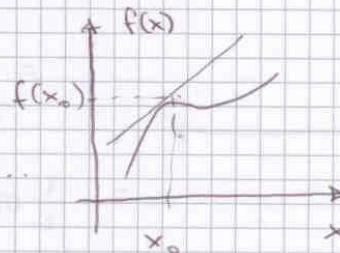
MECCANICA

XVII lezione
21/03/11

SVILUPPO DI TAYLOR

sin $\theta \approx \theta$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$



PROGRAMMA MATEMATICA

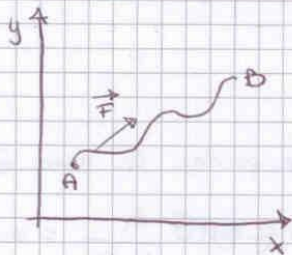
SERIES $[f(x), \{x, x_0, n\}]$

SERIES $[\sin(x), \{x, 0, 1\}] \rightarrow x + (0(x^2))$

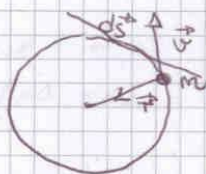
$$W_{AB}^{(C)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove $\vec{e}$ sta per
linea

XVIII lezione
1/04/11



Ex. Consideriamo un corpo di massa m , con una certa velocità v , con un moto circolare uniforme



$$ds = ds \cdot \hat{r}_t$$

① la forza centripeta non compie lavoro

$\vec{F}$ e $d\vec{s}$ sono ortogonali tra loro e quindi
 $F \cdot \Delta x \cdot \cos 90^\circ = 0$

Ex:



$$W(m) = 0$$

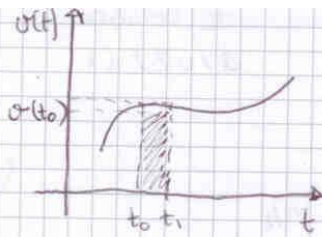
Sorgente : <http://holisi.hasanaj.com/>

Autore : HOLSI HASANAJ

Professore: SANTARSIERO

CORSO di INGEGNERIA INFORMATICA ROMA TRE

ANNO di PRODUZIONE: 2010-2011

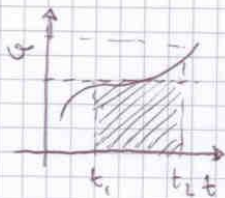


$$\bar{v}_{12} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1 = x(t_1) \\ x_2 = x(t_2) \end{cases}$$

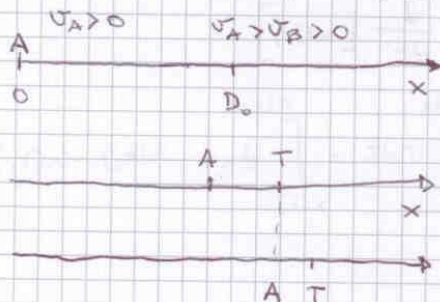
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

$$\bar{v}_{12} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[x(t_2) - x(t_1) \right] = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} v(t') dt' - x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} v(t') dt' \right] = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t') dt'$$

relazione tra velocità media e velocità istantanea



Esercizio (SECONDO PARADOSSO DI ZENONE DI ELEA)

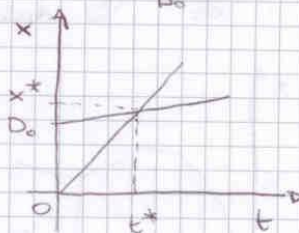


$$x_A(0) = 0$$

$$x_A(t) = v_A t + \overbrace{x_A(0)}^{x^0}$$

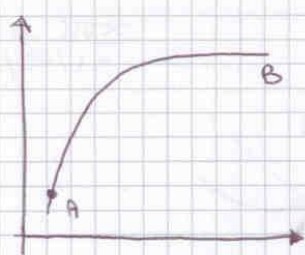
$$x_T(t) = v_T t + \overbrace{x_T(0)}^{D_0}$$

$$\begin{cases} x_A(t^*) = x^* = v_A t^* \\ x_T(t^*) = x^* = v_T t^* + D_0 \end{cases}$$



$$0 = (v_A - v_T) t^* - D_0 = t^* = \frac{D_0}{v_A - v_T}$$

$$x^* = \frac{v_A D_0}{v_A - v_T}$$



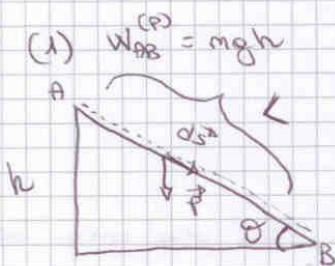
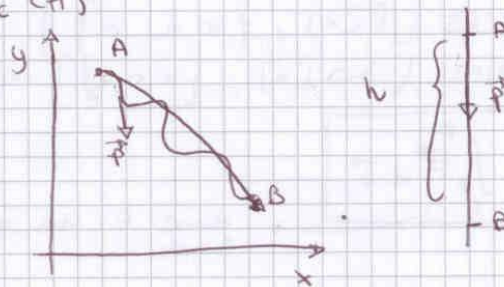
$$W_{AB}^{(tot)} = \int_A^B \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{s} = m \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} a_x dx + \int_{y_A}^{y_B} a_y dy = \frac{1}{2} (v_{Bx}^2 - v_{Ax}^2) + \frac{1}{2} (v_{By}^2 - v_{Ay}^2)$$

$$= \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2$$

$$W_{AB}^{(tot)} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{E_c(B)} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{E_c(A)}$$

$$W_{AB}^{(F)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$$(1) W_{AB}^{(F)} = mgh$$

① Lo posso fare perché la forza è costante

$$W_{AB}^{(F)} = mg \sin \theta L = mg \sin \theta \frac{h}{\sin \theta} = mgh$$

$$L \sin \theta = \frac{h}{\sin \theta}$$

Es: $\vec{F} = \text{costante}$

$$W_{AB}^{(F)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \int_A^B d\vec{s}$$

$$\Delta \vec{r} = (\overbrace{x_B - x_A}^{\Delta x}, \overbrace{y_B - y_A}^{\Delta y})$$

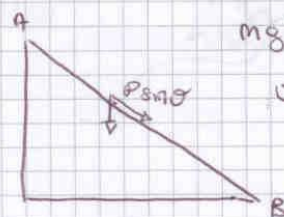
→ vettore spostamento

$$\vec{F} = -mg \hat{y} \cdot \underbrace{\Delta \vec{r}}_{\Delta y} = -mg(y_B - y_A) = mg(y_A - y_B)$$



$$mgh = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = 2gh$$



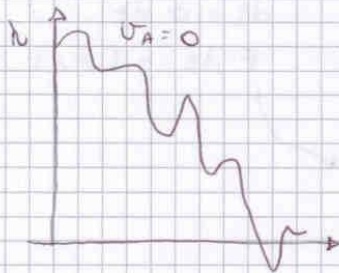
$$mgh = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = 2gh$$

Fisica

MECCANICA

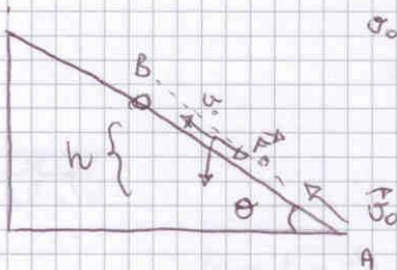
XVIII Lezione
1/06/11



$$W_{AB}^{(nc)} = 2mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$v_B^2 = 2gh + v_A^2$$

Ex:



$$v_0 = 2 \text{ m/s} \quad \theta = \pi/6 \quad \mu_d = 0,4$$

$$W_{AB}^{(tot)} = W_{AB}^{(p)} + W_{AB}^{(nc)} + W_{AB}^{(f)}$$

$$\underbrace{-mgh}_{W_{AB}^{(p)}} \quad \underbrace{0}_{W_{AB}^{(nc)}} \quad \underbrace{-F_A \cdot L}_{W_{AB}^{(f)}}$$

$$F_A = \underbrace{mg \cos \theta \cdot \mu_d}_N$$

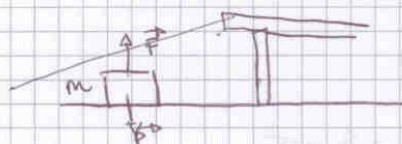
$$W_{AB}^{(f)} = -mg \cos \theta \cdot \mu_d \cdot \frac{h}{\sin \theta}$$

$$= -mgh \mu_d \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\begin{cases} W_{AB}^{(tot)} = -mgh - mgh \frac{\mu_d}{\tan \theta} = -mgh \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta}\right) \\ \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta}\right) \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g \left(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta}\right)} \end{cases}$$

POTENZA

Ex:



$$\vec{c} \cdot mgh = W \quad \vec{c} \text{ è uguale a } \vec{c} \text{ calore}$$

→ LA POTENZA misura quanto velocemente si fa il lavoro

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$P(t) = \frac{dW}{dt}$$

$$[P] = J/s = W$$

Watt

$$KW/h = 3,6 \cdot 10^6 J$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

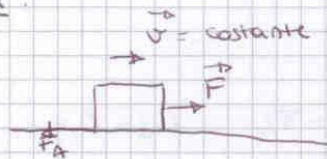
$$dW = F ds = F v dt$$

$$\frac{dW}{dt} = F v$$

$$ds = v dt$$

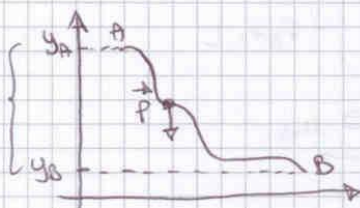
$$F \cdot ds = F v dt = dW$$

Ex:



$$P = F_A v$$

$$F_A \propto v$$



$$W_{AB}^{(tot)} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$W_{AB}^{(cp)} = mg(y - y_0)$$

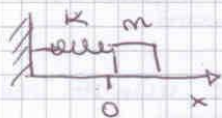
FORZA PESO

$$mg y_A - mg y_B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\underbrace{mg y_A}_{U(A)} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{E_c(A)} = \underbrace{mg y_B}_{U(B)} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{E_c(B)}$$

MECCANICA
Energia Potenziale $\rightarrow E = \underbrace{mg y + \frac{1}{2} m v^2}_{E \text{ cinetica}}$

HOUA

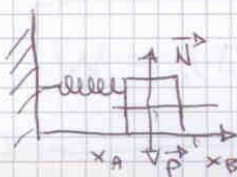


$$W_{AB}^{(e)} = \frac{1}{2} K x_A^2 - \frac{1}{2} K x_B^2$$

$$W_{AB}^{(tot)} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\frac{1}{2} K x_A^2 - \frac{1}{2} K x_B^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\frac{1}{2} K x_A^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} K x_B^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

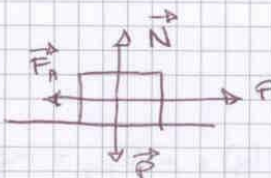
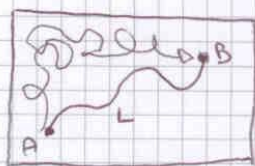


Fisica

MECCANICA

XIX Lezione
11/04/11

Forza elastica: $E = \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_{E. \text{ Potenziale}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E. \text{ Cinetica}}$



$$F_A = \mu_d N$$

$$W_{AB}^{(A)} = -F_A L$$

$$W_{AB}^{(A)} = -F_A L$$

① il lavoro delle forze dell'attrito non dipende anche dal cammino percorso

- FORZE CONSERVATIVE: l'energia si conserva. Es: Forza peso non dipende dal cammino percorso

- FORZE NON CONSERVATIVE: l'energia non si conserva. Es: Forza d'attrito e dipende dal percorso (cammino)

ENERGIA POTENZIALE

$$W_{AB}^{(F)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

F. conservativa:

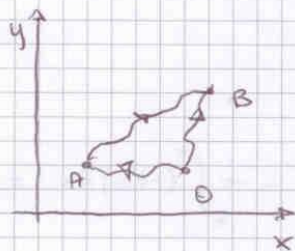
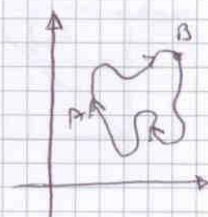
$$W_{AB}^{(F)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \forall \ell$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

- Una forza è conservativa se il lavoro non dipende dal percorso

- Una forza è conservativa se il lavoro in un percorso chiuso è uguale a 0

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$$W_{OA} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{OB} = \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{OB} = W_{OA} + W_{AB} \Rightarrow W_{AB} = W_{OB} - W_{OA} = (-W_{OA}) - (-W_{OB})$$

$$W_{AB} = U(A) - U(B)$$

$$U(A) = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\underbrace{(-W_{OA})}_{U(A)} - \underbrace{(-W_{OB})}_{U(B)}$$

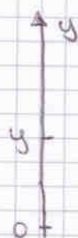
$$W_{AB}^{(tot)} = U(A) - U(B)$$

$$E_c(B) - E_c(A) \Rightarrow U(A) - U(A) - U(B) = E_c(B) - E_c(A)$$

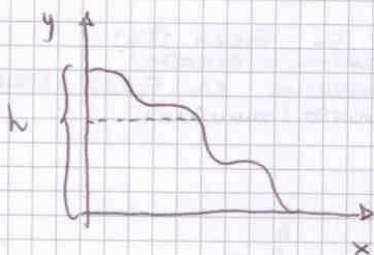
$$U(A) + E_c(A) = U(B) + E_c(B)$$

Ex:

FORZA PESO



$$W_{oy} = -mgy \Rightarrow U(y) = -W_{oy} = mgy$$



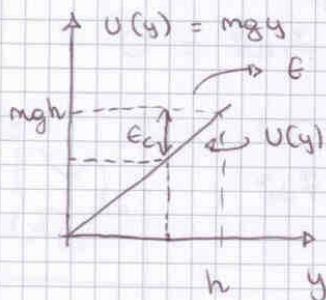
$$U(y) = mgy$$

$$E_c(y) = \frac{1}{2} m v_y^2$$

$$E(y) = U(y) + E_c(y) = \text{costante}$$

$$E(A) = mgh + \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$E(B) = 0 + \frac{1}{2} m v_B^2$$



$$v_A = 0$$

$$E = E(B) = E(y)$$

FORZA ELASTICA



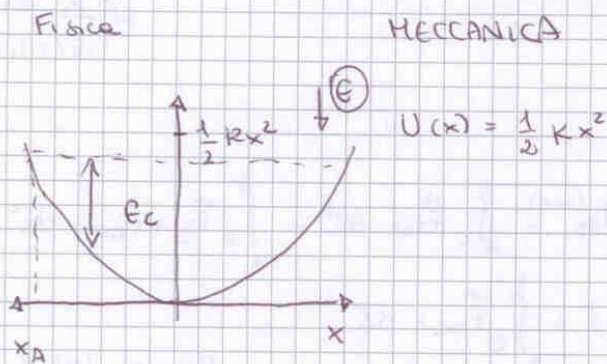
$$F = -Kx$$

$$v_A = 0$$

$$E(A) = U(A) + E_c(A)$$

$$\frac{1}{2} K x_A^2 \quad 0$$

$$U(A) = -W_{bA} = -\int_0^{x_A} (-Kx) dx = \frac{1}{2} K x_A^2$$



FORZA ELASTICA:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

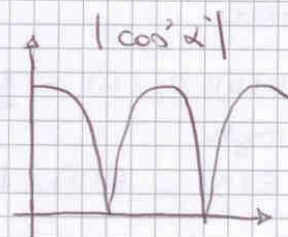
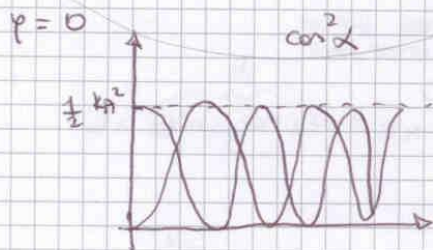
$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t)$$

$$\begin{cases} E_c(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



$$E = E_c(t) + U(t) = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$U^{(F)}(A) = - \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^A \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \left(- \int_0^A \vec{F}_i \cdot d\vec{s} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N U^{(i)}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$U = \sum_{i=1}^N U_i$$

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

$$W_{AB}^{(tot)} = \int_A^B \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \underbrace{\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s}}_{U(A) - U(B)} + \underbrace{\int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{s}}_{L_{nc}}$$

Lavoro forze non conservative

$$E_c(B) - E_c(A) = U(A) - U(B) + L_{nc}$$

$$\underbrace{E_c(B) + U(B)}_{E(B)} = \underbrace{E_c(A) + U(A)}_{E(A)} + L_{nc} \Rightarrow E(B) = E(A) + L_{nc}$$

l'energia totale in b è minore dell'energia potenziale in A

ESERCIZIO: Determinare la quota massima SENZA ATTRITO

$$E(A) = U(A) + E_c(A)$$

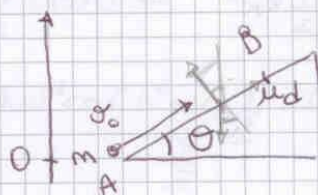
$$\downarrow 0 \quad \downarrow \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E(B) = U(B) + E_c(B)$$

$$\downarrow mgh \quad \downarrow 0$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

$$\frac{v_0^2}{2g} = h$$



CON ATTRITO

$$E(A) = U(A) + E_c(A) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E(B) = mgh$$

$$E(B) = E(A) + L_{nc}$$

Lavoro forze non conservative

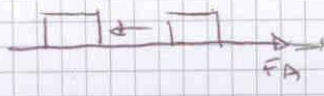
$$L_{nc} = -\mu_d mg \cos \theta \cdot L$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 - \mu_d mg \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta})}$$

Come faccio a capire se una forza è conservativa o meno?

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\text{in una dimensione}} \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx$$

$$U(x) = - \int_0^x F(x) dx$$



quindi quindi la forza attrito sarà $= 2F_A$ e dipenderà dalla velocità

Fisica

MECCANICA

XX Lezione
05/04/11

$$U(x) = - \int_0^x F(x') dx'$$

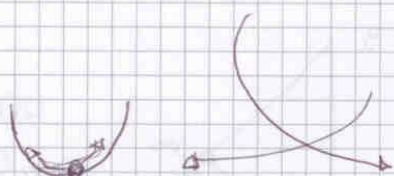
$$U(x) = - \int_0^x F(x') dx'$$

$$U(x) \rightarrow F(x) = - \frac{dU}{dx}$$

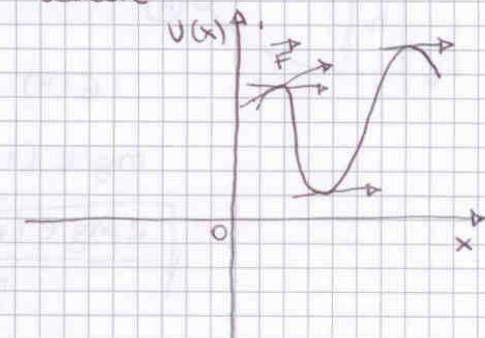
$$\text{equilibrio } F=0 \Rightarrow \frac{dU}{dx}$$

Analizziamo i casi di equilibrio

↳ MINIMO:

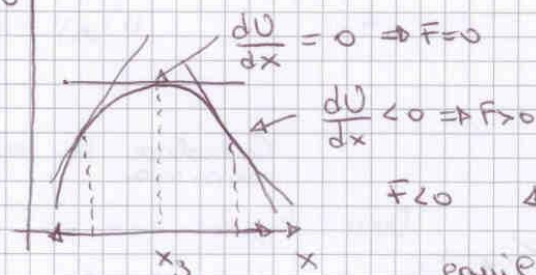


minimo di
equilibrio stabile



MASSIMO

↳



$$F < 0 \Leftrightarrow \frac{dU}{dx} > 0$$

equilibrio instabile



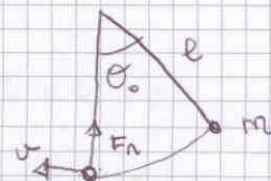
Es: Un pendolo semplice di massa m viene lasciato da una
una posizione con velocità nulla. Si calcoli la tensione
del filo in

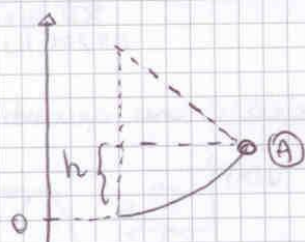
$$F_n = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_n = T - mg$$

$$T - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$T = \frac{mv^2}{r} + mg$$





$$E(A) = mgh$$

$$E(B) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = l - l \cos \theta_0 = l(1 - \cos \theta_0)$$

$$E(A) = E(B)$$

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\sqrt{\frac{2mgl(1 - \cos \theta_0)}{m}} = v$$

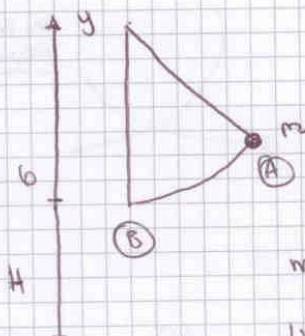
$$T = mg + 2mg(1 - \cos \theta_0) = mg(3 - 2 \cos \theta_0)$$

OSSERVAZIONE

Posso scegliere qualsiasi sistema di riferimento

$$E_c(A) + U(A) = E_c(B) + U(B)$$

$$E_c(A) + mgh + \cancel{mgH} = E_c(B) + \cancel{mgH}$$

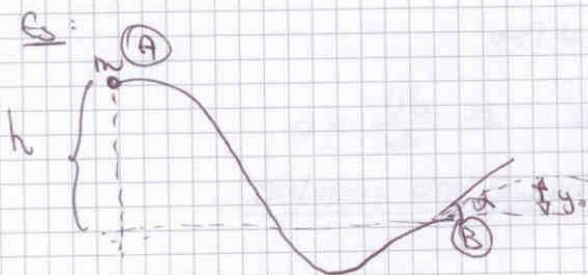


$$U(B) = 0$$

$$U(A) = mgh$$

$$U'(A) = mg(H+h) = mgh + mgH$$

$$U'(B) = mgH$$



Calcolare la quota massima

Dati: h, α

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(x - x_0)$$

$$v^2 = 2gh \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$y = v \sin \theta t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = v \cos \theta t$$

$$\frac{x}{v \cos \theta}$$

Con la cinematica

$$y = v \sin \theta \frac{x}{v \cos \theta} + \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta x + \frac{g}{2v^2 \cos^2 \theta} x^2$$

$$y' = \tan \theta + \frac{g}{v^2 \cos^2 \theta} x = 0 \quad 0 = \tan \theta + \frac{g}{v^2 \cos^2 \theta} x = \frac{v^2 \cos^2 \theta (-\tan \theta)}{g} \Rightarrow x = \frac{v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Fisica

MECCANICA

XX Lezione
05/04/11

con la conservazione del moto

$$E(A) = E(B) = E(C)$$

$$v_C = v_B \cos \alpha$$

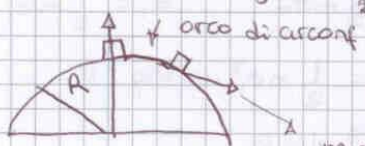
$$mg y_0 + \frac{1}{2} m v_C^2 = mg y_0 + \frac{1}{2} m v_B^2 \cos^2 \alpha$$

$$mg y_0 = \frac{1}{2} m v_B^2 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} \sin^2 \alpha$$

XXI Lezione
07/04/11

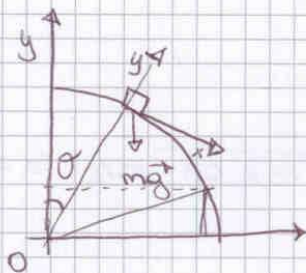
Es:



$$\theta = ?$$

moto parabolico

Il distacco tradisce e' annullamento della forza Normale (reazione)



$$\theta^* \text{ tale che } N(\theta^*) = 0$$

$$E_i = mgR$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + mg R \cos \theta$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$m \vec{g} + \vec{N} = m \vec{a}$$

$$\text{rad: } mg \cos \theta - N = m a_{\perp} = m \frac{v^2}{R}$$

$$N(\theta) = mg \cos \theta - m \frac{v^2}{R}$$

$$mgR = mgR \cos \theta^* + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$$

$$N(\theta) = mg \cos \theta - \frac{m}{R} 2gR(1 - \cos \theta) = -2gm + 3gm \cos \theta$$

$$N(\theta) = -2gm + 3gm \cos \theta$$

$$N(\theta^*) = 0 = -2gm + 3mg \cos \theta^*$$

$$2gm = 3mg \cos \theta^*$$

$$\arccos\left(\frac{2}{3}\right) = \theta$$

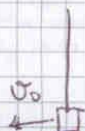
Es: un punto materiale è vincolato a muoversi lungo un filo di lunghezza $l = 10 \text{ cm}$. Il corpo deve poter compiere una giro completo.

Bungo on filo

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$v_0 = ?$$

$$30 \text{ mm/s. } T = 0$$



Fisica

MECCANICA

7/03/11

IV lezione

Es: In una gara a cronometro un ciclista parte al tempo $t=0$ dalla postazione $x_0=0$ e procede con velocità costante $v_1 = 40 \text{ Km/h}$. Al tempo $t_1 = 1 \text{ minuto}$ parte un secondo ciclista con velocità $v_2 = 50 \text{ Km/h}$. Dopo quanto tempo e a che distanza raggiunge il primo ciclista

$$x = x_0 + v t \quad x = 0 + 40 \cdot t$$

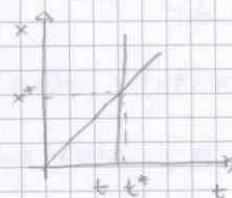
$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$

$$1 : 60 = x : 1$$

$$x = 1/60$$

$$40 \cdot t = 50 \cdot \frac{1}{60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$$

$$= v(t - t_0) + x(t_0)$$



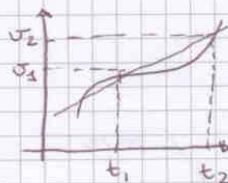
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t^*) = x^* = v_1 t^* \\ x_2(t^*) = x^* = v_2 (t^* - t_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 t^* = v_2 t^* - v_2 t_1 \Rightarrow (v_2 - v_1) t^* = v_2 t_1$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{v_2}{v_2 - v_1} t_1 \quad t^* = 300 \text{ s}$$

$$x(t)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$



$$a_{m12} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$[a] = \text{m/s}^2$$

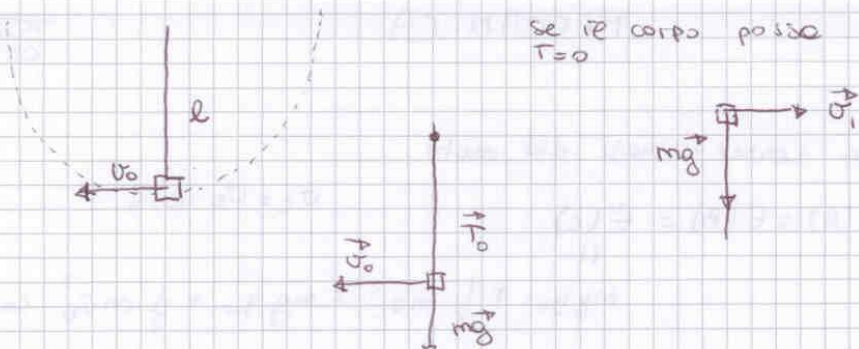
accelerazione gravitazionale $\approx 9.8 \text{ m/s}^2$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow \text{derivata seconda}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

$$\Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt'$$

se il corpo passa per la normale
 $T=0$



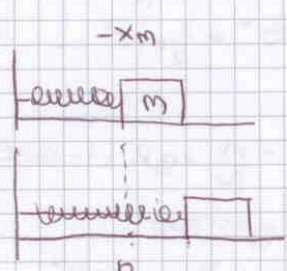
$\vec{F} = m\vec{a}$
 $T_1 + mg = m \frac{v_1^2}{r}$
 $T_1 = \frac{mv_1^2}{r} - mg =$
 $= \frac{m}{r} v_0^2 - \frac{m}{r} 4gl - mg =$
 $= \frac{m}{r} v_0^2 - 5mg$
 $T=0 = \frac{m}{r} v_0^2 - 5mg$

$E_0 = E_1$
 $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mg 2l$
 $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mg 2l$
 $v_1^2 = v_0^2 - 4gl$
 $v_0^2 = 5gl$
 $v_0 = \sqrt{5gl} = \sqrt{5 \cdot 9,8 \cdot 0,1} \text{ m/s} \approx 2,25 \text{ m/s}$

Es: Data una generico v_0 . Determinare come varia la tensione del filo in funzione dell'angolo θ - $\rightarrow$
 $\vec{v}_0$
 $T(\theta) = ?$

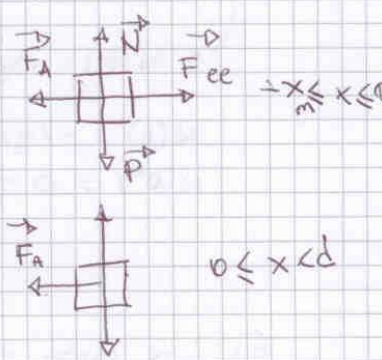
molle e corpo non sono attaccati

Es: $m = 10g$
 $\mu_d = 0,2$
 $x_m = 2cm$
 $d = 50cm$



$\vec{F} = m\vec{a}$
 $-F_A - Kx = F_x = max$ $x \leq 0$
 $F = \mu_d mg$
 $E_f - E_i = Lmc$
 $E_f = 0 + 0 + 0$
 $E_c + U_g + U_{el}$
 $E_i = 0 + 0 + \frac{1}{2} K x_m^2$ $\Rightarrow A$

$K = ?$



ad ogni forza conservativa agisce un'energia potenziale

Fisica

MECCANICA

Xxi lezione

27/04/11



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$dL = F ds \cos \theta$$

$$L = FAs \cos \theta$$

$$L_{nc} = -4m mg (d + x_m)$$

$$+ \frac{1}{2} K x_m^2 = +4m mg (d + x_m)$$

$$K = \frac{2 \cdot 4m mg (d + x_m)}{x_m^2} \approx 51 \frac{N}{m}$$



K = ?

Scrivere un'espressione

Es $m = 1g$

$$U(x) = -U_0 e^{-\alpha x^2}$$

$$U_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\alpha = 10^2 \text{ m}^{-2}$$

$$U_0 = 2 \text{ m/s}$$

ampiezza delle oscillazioni

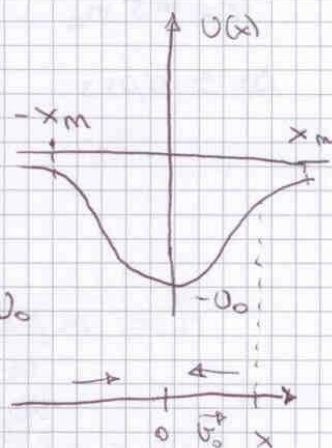
$$F(x) = -\frac{dU}{dx}(x)$$

$$E_{mc} = \text{cost}$$

$$t = 0$$

$$x = 0$$

$$E_m(x, t) = E_m(0, 0)$$



$$E_m(x, t) = E_m(0, 0) = E_{cm} + U = \frac{1}{2} m \sigma_0^2 - U_0$$

$$E_m(x, t) = \frac{1}{2} m \sigma^2(x, t) + U(x)$$

$$E_m(x_m) = 0 + U(x_m)$$

$$U(x_m) = \frac{1}{2} m \sigma_0^2 - U_0$$

$$-U_0 e^{-\alpha x_m^2} = \frac{1}{2} m \sigma_0^2 - U_0$$

$$x = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{m \sigma_0^2}{2U_0} - 1\right)}{\alpha}}$$

$$\frac{\frac{1}{2} m \sigma_0^2 - U_0}{-U_0}$$

$$-\alpha x_m^2 = \ln\left(\frac{1}{2} \frac{m \sigma_0^2}{U_0} - 1\right)$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$[P] = \text{Kg m/s}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{tot}}$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

→ caso in cui la massa è costante

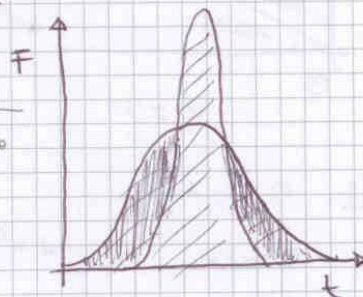
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{tot}} dt = \int_{\vec{p}(t_1)}^{\vec{p}(t_2)} d\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\text{tot}}(t) dt = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$

IMPULSO

Forza impulsiva

Si fa vedere che
l'impulso
dipende sia dall'intensità
che dal tempo

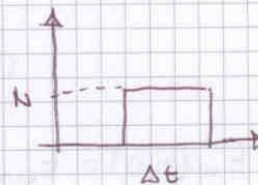
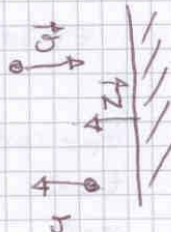


Es:

$$m = 10 \text{ g}$$

$$v = 5 \text{ m/s}$$

$$\Delta t \approx 0,01 \text{ s}$$



$$m\Delta\vec{v} = \vec{N}\Delta t$$

$$N = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} = 10 \text{ N}$$

$$\vec{N} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{N}\Delta t = m\Delta\vec{v}$$

Fisica

MECCANICA

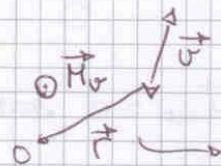
XXII edizione
08/04/11

MOMENTO DI UN VETTORE : (rispetto ad un polo)

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{v}$$

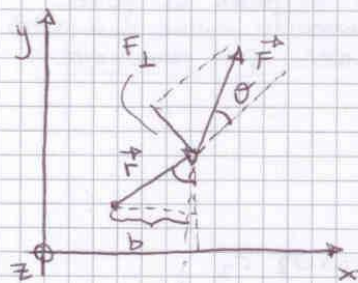
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{momento di una forza})$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\text{angolare})$$



raggio vettore che parte da un polo e arriva al punto di applicazione della forza

Es: (momento di una forza)



$$\vec{M} = M_z \cdot \hat{z}$$

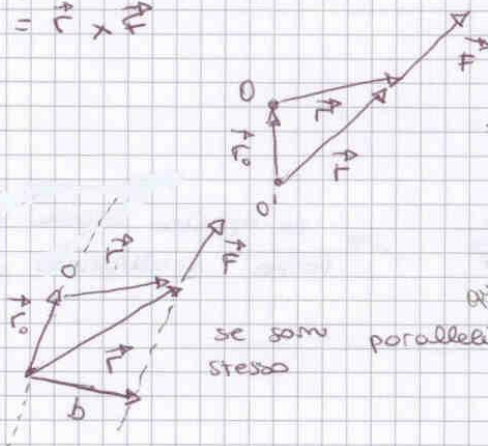
$$|M_z| = r \cdot F \sin \theta = r F_{\perp}$$

$$|M_z| = r \sin \theta \cdot F = b F$$

retta di applicazione della forza

Proprietà dei momenti:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

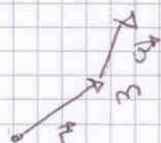


$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r}_0 + \vec{r}) \times \vec{F} = \\ &= \vec{r}_0 \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} + \vec{r}_0 \times \vec{F} \end{aligned}$$

qual è il braccio?

se sono paralleli il braccio risulta essere lo stesso

MOMENTO APPLICATO ALLA QUANTITÀ DI MOTO



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{tot}$$



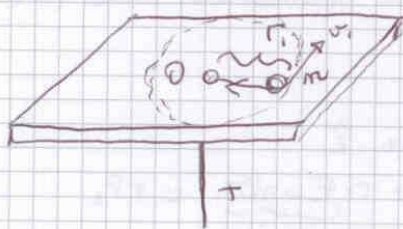
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F}_{tot} = \vec{0} + \vec{r} \times \vec{F}_{tot} = \vec{H}_{tot}$$

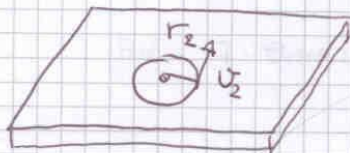
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{tot} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H}_{tot} \Rightarrow \vec{H}_{tot} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{costante}$$

Es:



$$L_1 = m v_1 r_1$$

ie momento di T no momento nullo rispetto al polo. Ie momento della quantità di moto non può contribuire?



$$L_2 = m v_2 r_2$$

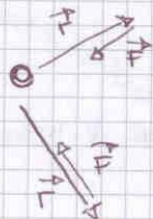
$$m v_2 r_2 = m v_1 r_1$$

$$\vec{H}_{tot} = \vec{r} \times \vec{T} = 0$$

poiche $\vec{r}$ è parallelo a $\vec{T}$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

Es



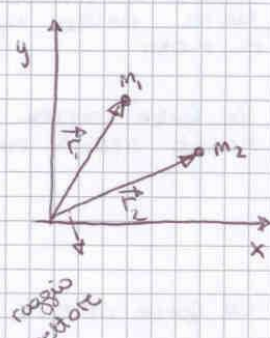
si applica anche alla forza di attrazione gravitazionale

XXIII Edizione
11/04/11

MECCANICA

SISTEMA di PUNTI:

Coordinate media $\rightarrow$ coordinate del centro di massa



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$\rightarrow$ media pesata con le masse

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

m

raggio vettore

$$\vec{r}_{cm}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m} \left[m \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} \right] = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

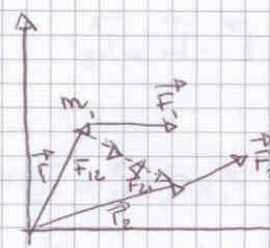
$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i \quad \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\vec{p} = m \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m}$$



FORZE INTERNE
del sistema

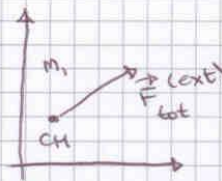
$$\vec{F}_{tot}^{(1)} = m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}^{(int)}$$

$$\vec{F}_{tot}^{(2)} = m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}^{(int)}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \left[\vec{F}_1 + \cancel{\vec{F}_{12}^{(int)}} + \vec{F}_2 + \cancel{\vec{F}_{21}^{(int)}} \right] =$$

$$= \frac{1}{m} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \frac{1}{m} \vec{F}_{tot}^{(ext)}$$

$\rightarrow$ la forza delle risultanti esterne sono le uniche forze che contribuiscono
(quelle interne NO)



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{tot}^{(ext)}$$

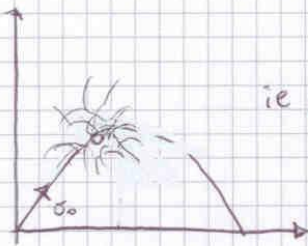
$\rightarrow$ 1° EQUAZIONE CARDINALE DEI SISTEMI

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{costante}$$

teorema della conservazione dello quantità di moto

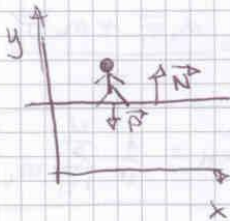
Le forze interne non hanno nessun ruolo

Es:

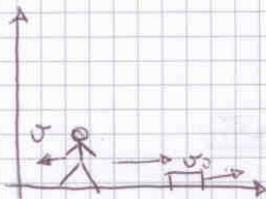


il proiettile esplode

per le forze interne tuttavia il centro di massa non cambia



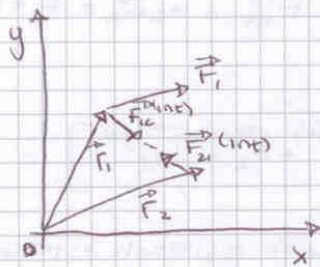
$$F_{tot,x}^{(int)} = 0 \Rightarrow a_{cm,x} = 0$$



$$\vec{P} = m\vec{v} + M\vec{V} = 0$$

$$M\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{u}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$



$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{H}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21}^{(int)}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21}^{(int)}$$

$$\vec{H}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12}^{(int)}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}^{(int)}$$

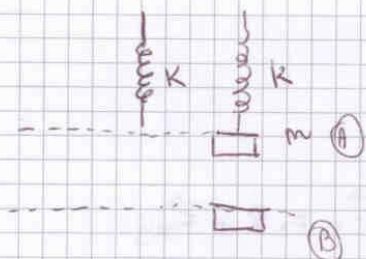
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21}^{(int)} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}^{(int)}$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{H}_{tot}^{(ext)}$$

Fisica

MECCANICA

XXIII lezione
11/04/11



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$F = -Kx = ma$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$E_A = mgh$$

$$E_{TOTB} = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$h = \frac{2mg}{K} = 2y_0$$

$$W_{AB}^{(ext)} + W_{AB}^{(int)} = \Delta E_C$$

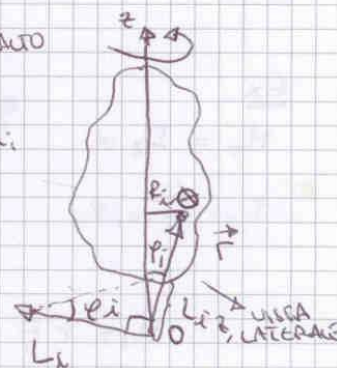
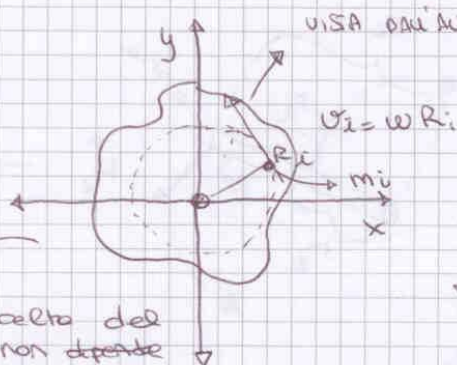
XXIV lezione
12/04/11

CORPI RIGIDI è un sistema per il quale la ^{mutua} distanza tra una particella e l'altra sono costanti

→ MOTO DI UN CORPO RIGIDO CHE PUÒ ROTARE NELLO SPAZIO.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\uparrow m_i \vec{v}_i$$



$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{tot}^{(ext)} \right)$$

La scelta del polo non dipende dal po è importante basta che stia sull'asse di rotazione

$$L_z = I_z \omega ; I_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$$

$$L_{i,z} = m_i v_{i,z} R_i \sin \varphi_i$$

$$= m_i v_{i,z} R_i = m_i \omega R_i^2$$

$$L_z = \sum_{i=1}^N L_{i,z} = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \omega$$

$I_z \Rightarrow$ momento d'inerzia

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z = M_{tot,z}^{(ext)}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{M_z = I_z \alpha}$$

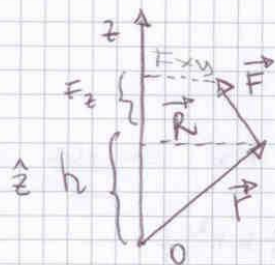
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

relative alle
traslazioni

$$M_z = I_z \alpha$$

relative alle
rotazioni

quanto la forza è efficace
per mettere in moto il corpo



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

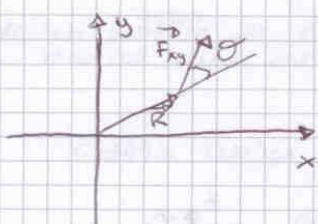
$$\vec{r} = h\hat{z} + \vec{R}$$

$$\vec{F} = F_z\hat{z} + \vec{F}_{xy}$$

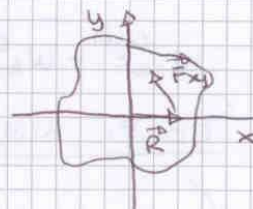
$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} &= (h\hat{z} + \vec{R}) \times (F_z\hat{z} + \vec{F}_{xy}) = \\ &= \underbrace{h\hat{z} \times F_z\hat{z}}_0 + \underbrace{h\hat{z} \times \vec{F}_{xy}}_{\perp \hat{z}} + \underbrace{\vec{R} \times F_z\hat{z}}_{\perp \hat{z}} + \underbrace{\vec{R} \times \vec{F}_{xy}}_{\parallel \hat{z}} \end{aligned}$$

$$M_z \hat{z} = \vec{R} \times \vec{F}_{xy}$$

richiedere perché è così



$$M_z = R \cdot F_{xy} \cdot \sin \theta$$



$$\vec{M} = M_z \hat{z} + \vec{M}_{xy}$$

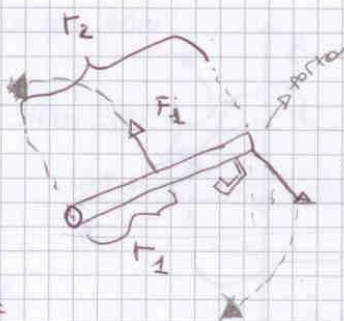
$$M_z \hat{z} = \vec{R} \times \vec{F}_{xy}$$

$$\vec{M}_{xy} = h\hat{z} \times \vec{F}_{xy} + \vec{R} \times F_z\hat{z}$$

Es

$$M_z = I_z \alpha$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$



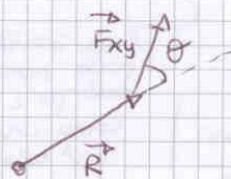
$$\vec{F}_2$$

equilibrio $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow M_z = 0$

$$M_1 = r_1 F_1$$

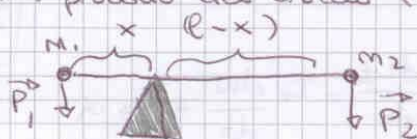
$$M_2 = -r_2 F_2$$

$$M_z = 0 = r_1 F_1 - r_2 F_2 \Rightarrow F_2 = \frac{r_1}{r_2} F_1$$



→ COPPIA = prodotto del braccio per la forza

Es:



$$M_1 = m_1 g \cdot x$$

$$M_2 = -m_2 g (l-x)$$

equilibrio : $M_1 + M_2 = 0$

$$m_1 g x - m_2 g l + m_2 g x = 0 \Rightarrow x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

→ CENTRO DI MASSA

Fisica

MECCANICA

XXIV Sezion
12/04/11

$$(\vec{F} = m\vec{a})$$

$$H_z = I_z \alpha$$

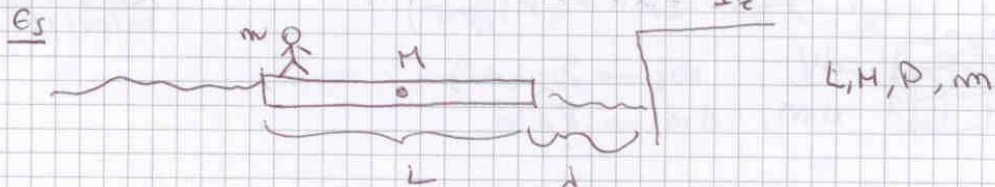
$$\uparrow \sum m_i R_i^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \sigma^2$$

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$



$$\downarrow E_c = \sum_{i=1}^N E_{ci} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} I_z \omega^2}$$



Visto che il centro di massa non varia posso uguagliare i due centri di massa

$$A) x_{cm} = \frac{M(D + L/2) + m(D + L)}{M + m}$$

$$B) x_{cm} = \frac{M(D' + L/2) + m D'}{M + m}$$

$$MD + \frac{ML}{2} + mD + mL = MD' + \frac{ML}{2} + mD' = (M + m)D'$$

$$(M + m)D + mL = (M + m)D'$$

$$D' = D + \frac{m}{M + m} L = D + \frac{L}{1 + M/m}$$

Sorgente : <http://holisi.hasanaj.com/>

Autore : HOLSI HASANAJ

Professore: Santarsiero

CORSO di Ingegneria INFORMATICA ROMA TRE

ANNO di PRODUZIONE: 2010-2011

$a = \text{costante} \Rightarrow$ moto uniformemente accelerato

$$v(t) = v(t_0) + a \int_{t_0}^t dt' = v(t_0) + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{[v(t_0) + a(t' - t_0)]}_{v(t')} dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t_0) dt' + \int_{t_0}^t a(t' - t_0) dt' = x(t_0) + v(t_0) \cdot \int_{t_0}^t dt' + a \int_{t_0}^t (t' - t_0) dt'$$

$$t' - t_0 = x$$

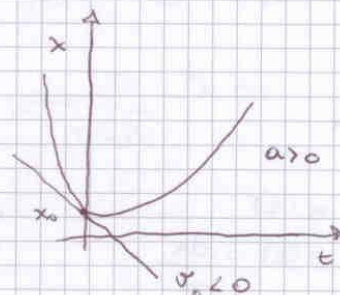
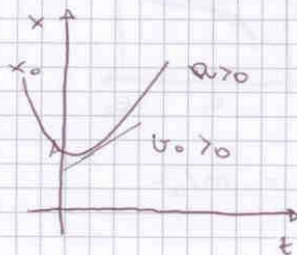
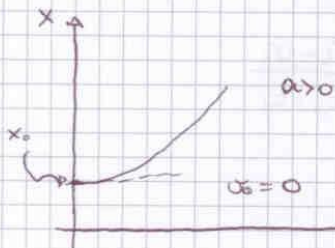
$$dt' = dx$$

$$= x(t_0) + v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$t_0 = 0; \quad x(0) = x_0; \quad v(0) = v_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

La velocità è negativa $\Rightarrow$



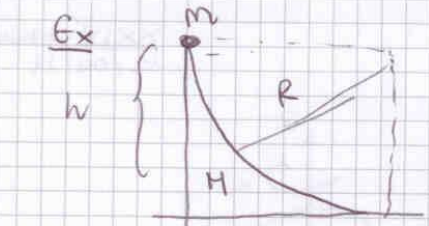
GRANDE: oggetto sottoposto alla forza peso

$$a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

perché prende l'asse delle y positivo

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$





$v_0 = 0$

$E_i = mgh + Mgy_0$

$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + Mgy_0$

non essendo forze non conservative
posso utilizzare la conservazione dell'energia

$mgh + Mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + Mgy_0$

visto che la velocità del centro di massa è cost posso utilizzare
la conservazione della quantità di moto

$mv - MV = 0 \quad V = \frac{m}{M}v$

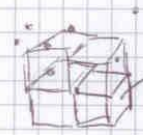
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2$

$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{M}v^2$

$v = \frac{2Mgh}{m+M}$

XXV lezione
14/04/11

① si deve conservare la componente orizzontale
e' energia totale si conserva

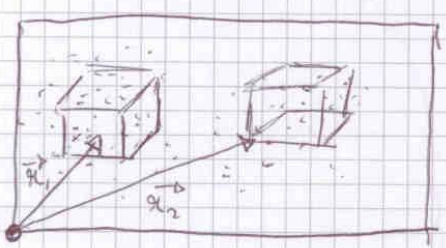


$\frac{dV}{dm}$

$m_i \rightarrow \sum_i (m_i)$

$dm \rightarrow \int dm$

ρ (densità di massa per unità di volume) = $\frac{dm}{dV} = \rho(\vec{r})$



$dV_1 = dV_2$

$dm_1 > dm_2$

$\rho(\vec{r}_1) > \rho(\vec{r}_2)$

$\int_V \frac{dm}{dV} dV$

$\rho = \frac{dm}{dV} = \rho(\vec{r}) \quad M = \int dm = \int_V \rho(\vec{r}) dV$

$dm = \rho dV \quad [\rho] = \text{Kg}/\text{m}^3$



$\rho_s = \frac{dm}{dS}$

$[\rho_s] = \text{Kg}/\text{m}^2$

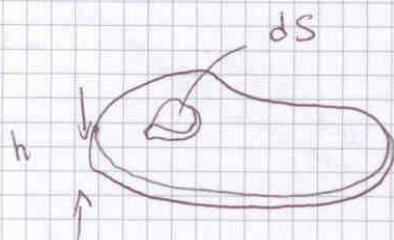
$M = \int dm = \int_S \rho_s dS$

2D
densità di massa superficiale

Fisica

MECCANICA

XXIV Century
14/04/11



$$dm = \rho dV = (\rho h) dS = \rho_s dS$$

si muove so
in termini
di superficie



$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow M = \int_V \rho dV$$

Es

$$\rho_s = 1000 \text{ g/m}^2$$

$$m = \rho_s S$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_s S}{V} =$$

$$= \rho_s \left(\frac{S}{V} \right) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{V}{S} \right)} = \frac{\rho_s}{h}$$

$$\boxed{h \rho = \rho_s}$$

CENTRO DI MASSA

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \rightarrow \text{centro di massa in 2D}$$

per pezzi continui

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm$$

3D

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV}$$

2D

$$dm = \rho_s dS \rightarrow \vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_S \vec{r} \rho_s dS$$

1D

$$dm = \rho_L dx \rightarrow \boxed{r_c = \frac{1}{M} \int_c x \rho_L dx}$$

Es L, m

$$\rho_L(x) = ?$$

$$x_{cm} = ?$$



$$\rho_L(x)$$

$$\rho_L(L) = 2\rho_L(0)$$

$$\rho_L(x) = \alpha + \beta x$$

$$\alpha + \beta L = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \beta L$$

$$\rho_L(x) = \beta L + \beta x = \beta(x+L)$$

$$m = \int dm = \int_0^L \rho_L dx = \int_0^L \beta(x+L) dx = \beta \int_0^L (x+L) dx =$$

$$= \beta \left[\frac{x^2}{2} + Lx \right]_0^L = \beta \left(\frac{L^2}{2} + L^2 \right) = \frac{3}{2} \beta L^2 = m$$

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{m}{L^2}$$

$$\rho_L(x) = \alpha + \beta x$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{m}{L}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m} \int x \rho_L(x) dx = \frac{\beta}{m} \int_0^L x(x+L) dx$$

$$= \frac{\beta}{m} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} L \right]_0^L = \frac{2}{3L^2} \left(\frac{L^3}{3} + \frac{L^3}{2} \right) = L \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{9} L$$

PROPRIETÀ CORPO ESTESO : [PESO]

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i (-m_i g \hat{y}) =$$

$$= -g \hat{y} \sum_i m_i = -g \hat{y} M$$

$$\vec{P} = \int -g \hat{y} dm = -g \hat{y} \int dm = -g \hat{y} M$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$U = \sum U_i = \sum m_i g y_i = g \sum m_i y_i$$



Fisica

MECCANICA

XXIV lezione
14/04/11

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

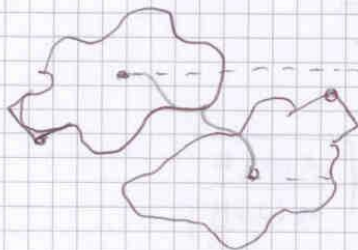
$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\begin{cases} M x_c = \sum m_i x_i \\ M y_c = \sum m_i y_i \\ M z_c = \sum m_i z_i \end{cases}$$

$$U = \sum U_i = \sum m_i g y_i = g \sum m_i y_i = g M y_c$$

Es

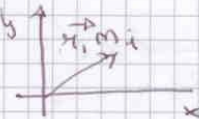


quello che conta è la variazione
del centro di massa

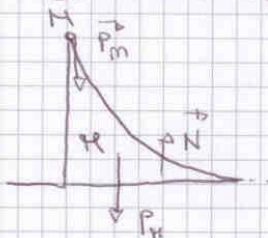
$$U = \int dm g y = g \int y dm = g M y_c$$

MOMENTO AD UN POLO

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i \vec{r}_i \times (-m_i g \hat{y}) = -g \sum_i (m_i \vec{r}_i \times \hat{y}) \\ &= -g \sum_i M_{ci} \vec{r}_c = -g \cdot M_{tot} \vec{r}_c \times \hat{y} \\ &= \vec{r}_c \times (-M_{tot} g \hat{y}) = \vec{r}_c \times \vec{P} \end{aligned}$$



Es (scivolo)



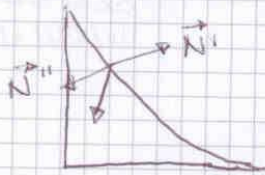
M, R, m

$$E_i = m g R + (M g y_c)$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 + 0 (+ M g y_c)$$

$$E_i = E_f \rightarrow \text{forze conservative}$$

v
 V ?
non cambia
perché i centro di massa
non cambia quota



$$mgR = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

Es. forze interne $\Rightarrow$ forze interne e uguale 0
in quanto il lavoro è uguale e contrario per i due oggetti

LA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA È UGUALE A 0

$$v_{cm} = \text{cost} \quad \Leftrightarrow \quad F_{ext, x} = 0$$

$$0 = \frac{m v - M V}{m + M}$$

$$m v - M V = 0$$

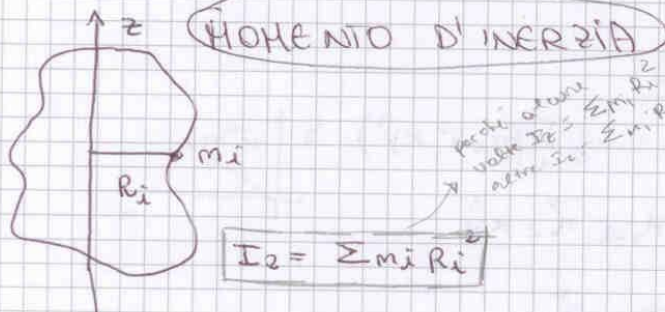
$$m v = M V$$

$$v = \frac{M}{m} V$$

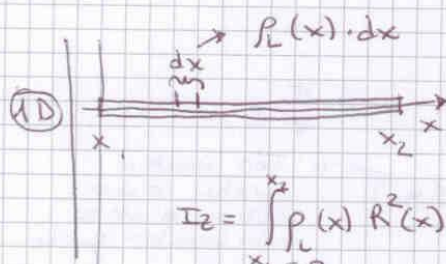
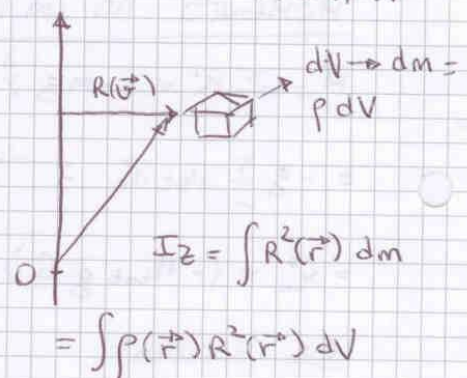
$$mgR = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m} \right)^2 V^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2mgR}{M(1 + \frac{M}{m})}$$

$$V = \sqrt{\frac{2mgR}{M(1 + \frac{M}{m})}}$$



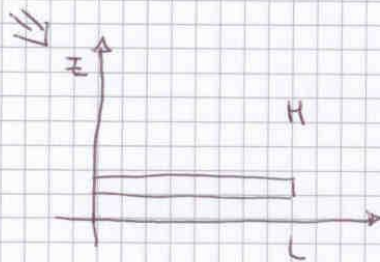
15/04/14



Fisica

MECCANICA

15/04/11
XXV lezione



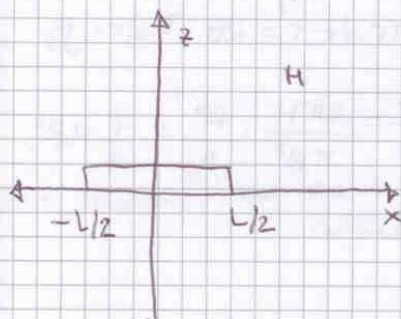
perché lo trattiamo come se fosse una costante?

$$I_z = \int_0^L \rho_L x^2 dx = \rho_L \int_0^L x^2 dx =$$

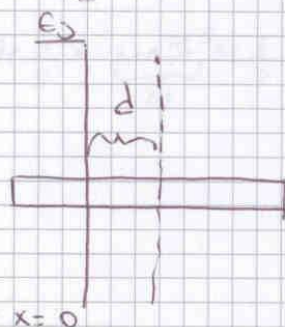
$$= \frac{1}{3} \rho_L L^3 = \frac{1}{3} \frac{H}{L} L^3 = \frac{1}{3} H L^2$$

① il momento d'inerzia dipende dall'orientamento dell'asse

$$I_z = \sum m_i R_i^2$$



$$I_z = \rho_L \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{H}{L} \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{1}{12} H L^2$$



L, H

Calcolare il momento d'inerzia

$$I_z = \frac{1}{12} H L^2 + H d^2 =$$

TEOREMA DI UIGHENT - STEINER
o teorema degli assi paralleli

$$I_z = \underbrace{\frac{1}{12} H L^2}_{I_{cm}} + H d^2$$

massa totale dell'oggetto
d è distante al quadrato

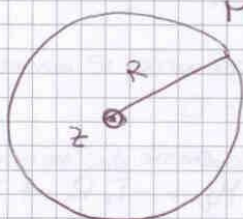
La teorema afferma che ci si può sempre riportare al caso del centro di massa operando una "traslazione" + $H d^2$

→ quello che ruota intorno al suo asse

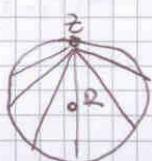
$$I = \sum m_i R_i^2$$

$$I_z = \int dm R^2$$

$$= R^2 \int dm = R^2 H$$



Es



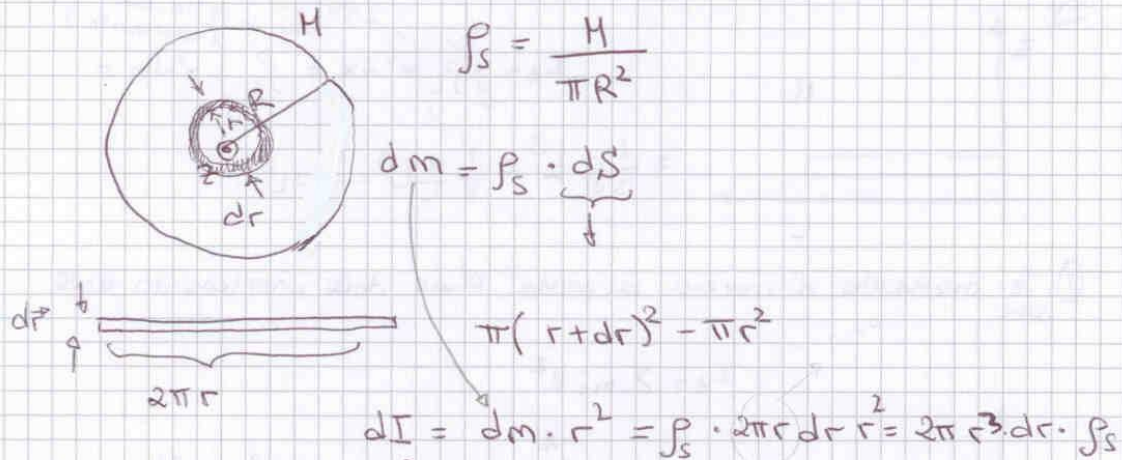
l'asse è quello z

Per il teorema di Uigher Steiner

$$I_z = H R^2 + H R^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} H L^2 + H d^2$$

Il momento d'inerzia minimo è quello passante per il centro di massa.



$\sigma_s = \frac{M}{\pi R^2}$

$dm = \sigma_s \cdot dS$

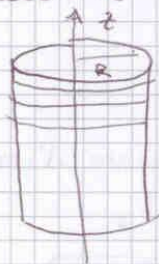
$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2$

$dI = dm \cdot r^2 = \sigma_s \cdot 2\pi r dr \cdot r^2 = 2\pi r^3 dr \cdot \sigma_s$

#1 $I_z = \int_0^R 2\pi \sigma_s r^3 dr = 2\pi \sigma_s \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{2\pi M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$

Integrale perché devo sommare tutti i momenti d'inerzia

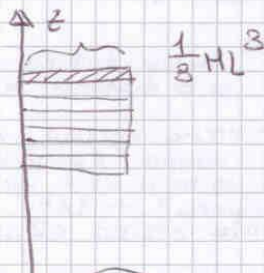
Calcolare il momento d'inerzia di un cilindro:



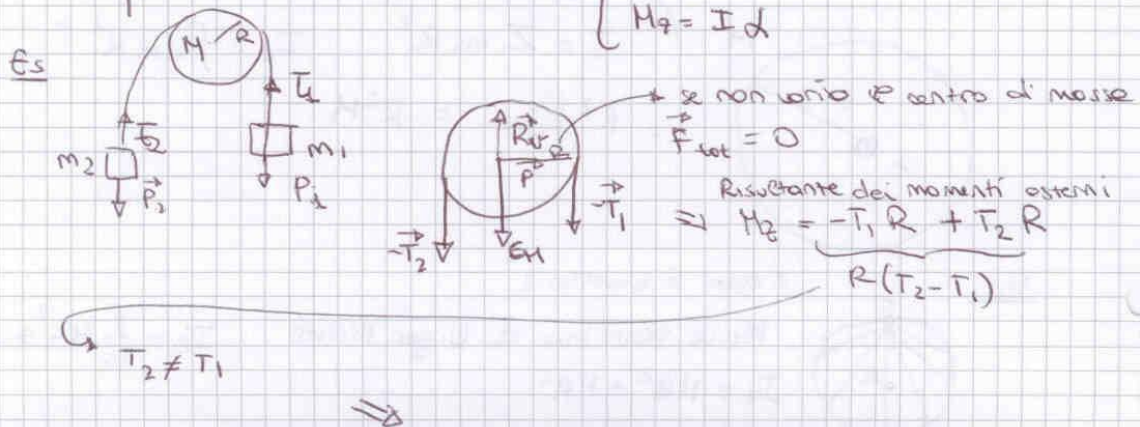
R, H

m_i

$I = \sum I_i = \sum \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2} R^2 \sum m_i = \frac{1}{2} M R^2$



$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = m \vec{a} \\ M_z = I \alpha \end{cases}$



Fisica

MECCANICA

XXV lezione
15/04/11

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ T_2 - T_1 = \frac{I}{R} \alpha \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = a$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_2 - T_1 = \frac{I a}{R^2} \end{cases}$$

→ ha 3 equazioni tutte e tre

$$T_1 - m_1 g + m_2 g - T_2 + T_2 - T_1 = a \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(m_2 - m_1) = a \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) \Rightarrow a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \rightarrow \text{perché è un disco}$$

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Es: Corpo rigido di massa M è vincolato a ruotare intorno ad un asse orizzontale O . Il momento d'inerzia I_0 vale I_0 . La distanza dal centro di massa vale l . Determinare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema intorno alla posizione di equilibrio.



I_0, l, M

$$M_p = -l \sin \theta \cdot Mg$$

||

$$I_d = -l \sin \theta \cdot Mg$$

$$\alpha = -\frac{l \sin \theta \cdot Mg}{I_0}$$

è l'unica forza esterna $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha = -\frac{l Mg}{I_0} \sin \theta$

$$\boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{l Mg}{I_0} \sin \theta} \rightarrow \theta$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{l Mg}{I_0}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{l Mg}{I_0} \theta$$

$$\Leftrightarrow I = m l^2$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{l Mg}{M l^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

E: Su una superficie orizzontale scabra, poggia una corda L , e di coefficiente di attrito statico μ_s . trovare il massimo valore di l/L tale che rimanga in equilibrio

$$P_e = \frac{H}{L}$$

$$F_A = m_2 g \leq \mu_s m_1 g$$

$$m_2 g \leq \mu_s m_1 g$$

$$P_e l \leq \mu_s P_e (L-l)$$

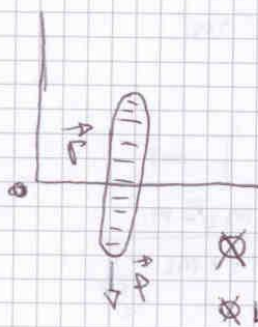
$$l \leq \mu_s L - \mu_s l$$

$$\frac{l}{L} (1 + \mu_s) \leq \mu_s$$

$$x \leq \frac{\mu_s}{1 + \mu_s}$$

$$l(1 + \mu_s) \leq \mu_s L$$

ESPERIMENTI



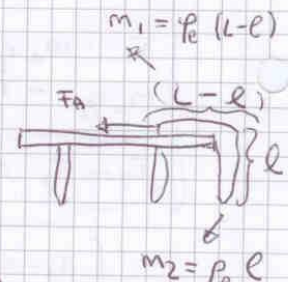
$$L_1 = \vec{L} (dt)$$

$$\vec{L}_0 = 0$$

$$\vec{H} = \vec{r} \times \vec{P}$$

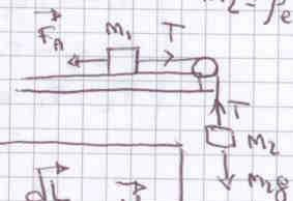
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H}$$

$$d\vec{L} = \vec{H} \cdot dt$$



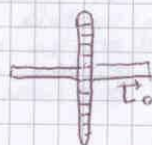
$$m_1 = P_e (L-l)$$

$$m_2 = P_e l$$

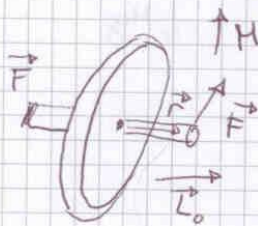


$$d\vec{L} = \vec{H} dt$$

dall'altro



$$\vec{H} dt = d\vec{L}$$

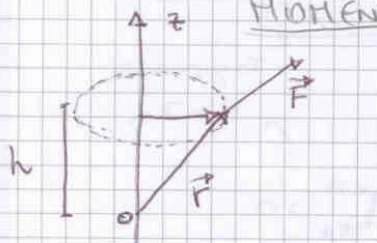


Fisica

MECCANICA

XXVI lezione
18/04/11

MOMENTO DEL LAVORO



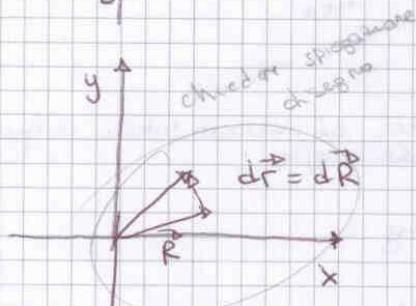
$$\vec{F} = F_z \hat{z} + \vec{F}_{xy}$$

$$\vec{r} = h \hat{z} + \vec{R}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \frac{dW}{d\theta} = M_z$$

perché $\vec{c} = 0$

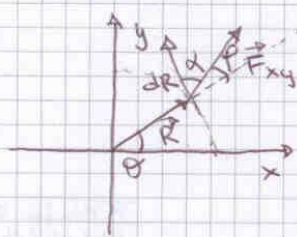
$$d\vec{r} = d\theta + d\vec{R}$$



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_z \hat{z} + \vec{F}_{xy}) d\vec{R} = \underbrace{F_z \hat{z} \cdot d\vec{R}}_0 + \vec{F}_{xy} \cdot d\vec{R}$$

$$= dR \cdot F_{xy} \cdot \sin \varphi =$$

$$= R d\theta F_{xy} \cdot \sin \varphi = \boxed{R F_{xy} \sin \varphi d\theta} \rightarrow M_z$$



$$\varphi = \pi/2 - \theta$$

$$dR = R d\theta$$

$$dW = M_z d\theta$$

analogo di

$$dW = F_x dx$$

$$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_z d\theta$$

$$M_z = M_{ext}^{(ext)}$$

$$W_{AB}^{(tot)} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_z d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{dL_z}{dt} d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d}{dt} (I_z \omega) d\theta =$$

$$I_z \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_z \int_{\omega_A}^{\omega_B} d\omega \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = I_z \int_{\omega_A}^{\omega_B} \omega d\omega = \underbrace{\frac{1}{2} I_z \omega_B^2}_{E_c(B)} - \underbrace{\frac{1}{2} I_z \omega_A^2}_{E_c(A)}$$

$$P = F \cdot v$$

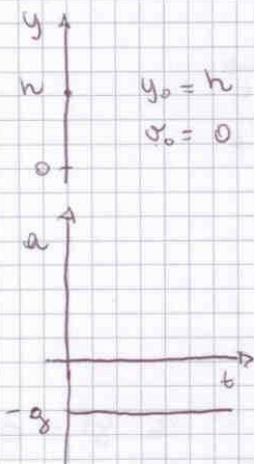
$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega$$

Fisica

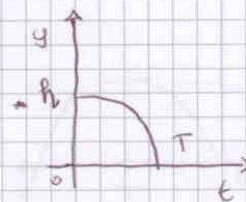
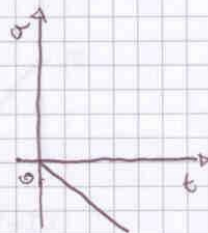
MECCANICA

7/03/11

IV lezione



$$y_0 = h \quad v_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v(t) = -gt \\ y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



$$y(T) = 0 \Rightarrow h - \frac{1}{2}gT^2 = 0$$

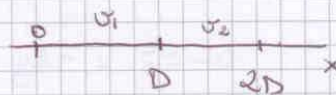
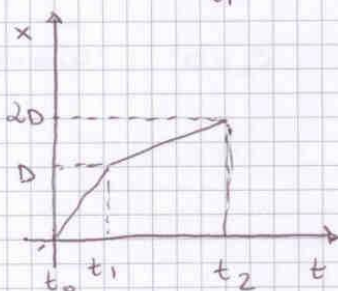
$$T^2 = \frac{2h}{g} \quad T = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Es: un'automobile che copre la distanza totale $2d$, percorre d alla velocità costante v_1 e la seconda alla velocità costante v_2

$$2d = 200 \text{ km} \quad v_1 = 140 \text{ km/h} \quad v_2 = 60 \text{ km/h}$$

Il primo tratto è la metà del secondo

$$\bar{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - t_0}$$

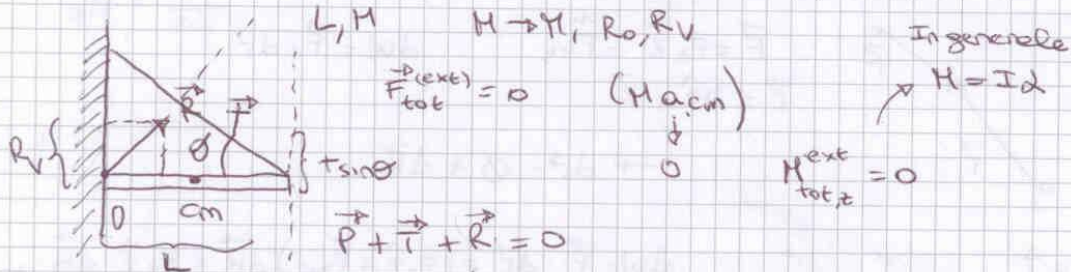


$$\bar{v} = \frac{2D}{t^2}$$

$$x(t) = v_1 t \quad D = v_1 t^* \quad t^* = \frac{D}{v_1}$$

$$D = v_2 (t_2 - t^*) = v_2 t_2 - v_2 \cdot \frac{D}{v_1} \Rightarrow \frac{D}{v_2} = t_2 - \frac{D}{v_1} \Rightarrow t_2 = D \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \Rightarrow \bar{v} = \frac{2D}{D \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)}$$

Problema : una sbarra sottile omogenea di L e massa M è incernierata nel punto O di una parete. Fila è mantenuta in posizione orizzontale da un filo. Determinare la tensione del filo e le componenti della Reazione del vincolo



per calcolare le braccia dobbiamo calcolare le distanze tra O e T

non contribuisce ai momenti totali in quanto è applicato all'origine
è il braccio

$$M_T = L T \sin \theta$$

$$M_p = -L/2 \cdot Mg$$

$$L T \sin \theta - \frac{1}{2} Mg = 0$$

$$T = + \frac{Mg}{2 \sin \theta}$$

$$x) R_0 - T \cos \theta = 0$$

$$y) R_v - mg + T \sin \theta = 0$$

$$R_0 = T \cos \theta$$

$$R_v = -T \sin \theta + mg$$

XXVII lezione
19/04/11

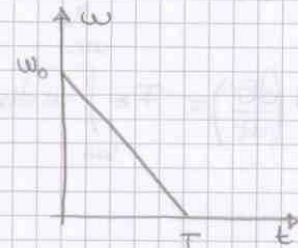
Un cerchio di raggio r e massa m , ruota intorno al proprio asse con velocità angolare ω_0 . Ad un certo istante esso viene fermato per mezzo di un cuscinetto, con una forza d'arresto F_A

T ? (tempo dopo quanto si ferma)

n ? (quanti giri prima di fermarsi)

M, R, ω_0, F_A

$$\begin{cases} M_z = I_z \cdot \alpha \\ M_A = -F_A \cdot R \end{cases} \Rightarrow -F_A R = I_z \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-F_A R}{I_z}$$



$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega(T) = 0$$

$$\omega_0 + \alpha T = 0 \Rightarrow T$$

$$T = -\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 I_z}{F_A R}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta(T) = \theta_0 + \omega_0 T + \frac{1}{2} \alpha T^2$$

$$= \theta_0 - \frac{\omega_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \omega_0^2}{\alpha^2} = \theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \theta(T) - \theta_0 = \Delta\theta = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha}$$

Fisica

MECCANICA

XXVII ciclo
19/04/11

$$\begin{aligned} &= \theta_0 - \frac{\omega_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} = \theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \theta(t) - \theta_0 = \Delta\theta = \\ &= \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{\omega_0^2}{2} \cdot \frac{I_z}{F_A R} = \frac{\omega_0^2}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \frac{1}{F_A R} = \frac{\omega_0^2 M R}{4 F_A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M = \frac{\Delta\theta}{\frac{\omega_0^2}{8\pi F_A}} = \frac{\omega_0^2 M R}{8\pi F_A} \end{aligned}$$

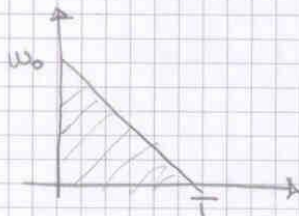
IN TERMINI DI ENERGIA

$$\begin{aligned} E_c(A) &= \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 \\ E_c(B) &= 0 \end{aligned} \quad \Delta E_c = -\frac{1}{2} I_z \omega_0^2$$

$$W_{AB} = \int_{\theta_0}^0 M_z \cdot d\theta \quad \rightarrow \quad -F_A R \Delta\theta \Rightarrow -F_A R \Delta\theta = -\frac{1}{2} I_z \omega_0^2 \Rightarrow$$

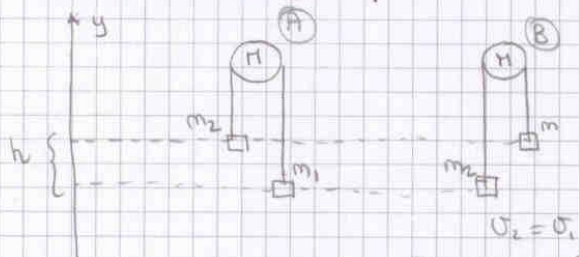
$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{I_z \omega_0^2}{2 F_A R}$$

UN'ULTERIORE RISOLUZIONE



Visto che lo spostamento è l'integrale della velocità, mi calcolo l'area sottesa alla curva.

E3: Carrucola con massa M che può ruotare liberamente intorno ad un perno. Nell'istante iniziale la massa m_2 è ferma alla quota h rispetto alla massa m_1 . Calcolare la velocità di m_1 .



$$m_1 < m_2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2$$



$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g$$

$$2ah = v_2^2 - v_1^2$$

(x₂ - x₁)

MODO ALTERNATIVO (ENERGIA)

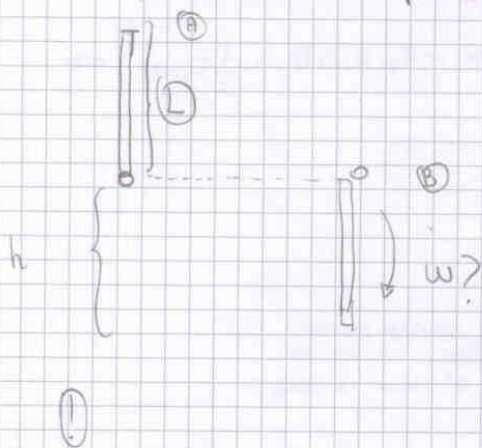
$$E(A) = \underbrace{0}_{E_2} + \underbrace{m_2 gh}_{E_1} + \underbrace{0 + 0 + 0}_{E_C} + \underbrace{Mgh}_{E_C}$$

$$E(B) = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + 0 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + m_1 gh + \frac{1}{2} I_z \omega^2 + Mgh$$

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + m_1 gh + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{v_2}{R} \right)^2$$

$$(m_2 - m_1) gh = \frac{1}{2} v_2^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow v_2^2 = \frac{2gh}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Es: Una bacchetta di lunghezza L incernierata, viene lasciata cadere dalla posizione di equilibrio stabile.



$$E_A = \frac{1}{2} mL \frac{g}{2}$$

$$E_B = -\frac{1}{2} mLg + \frac{1}{2} I_z \omega_0^2$$

$$\frac{2gL}{3} = I_z \omega_0^2$$

$$\sqrt{\frac{6g}{L}} = \omega_0 =$$

centro di massa

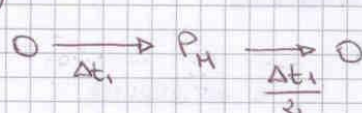
Fisica

MECCANICA

XXVIII 22
20/04/09

ESERCITAZIONE: (PREPARAZIONE I ESONERO)

ES 1



P_H = POTENZA MASSIMA

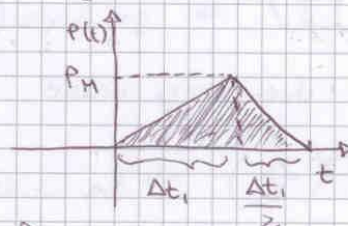
quanto vale il lavoro?

~~a) $\frac{3}{4} \Delta t_1 P_H$~~

b) $\frac{3}{2} \Delta t_1 P_H$

c) $\frac{2}{3} \Delta t_1 P_H$

$$P = \frac{dL}{dt} \Rightarrow L = \int_0^{\frac{3}{2}\Delta t_1} P dt \Rightarrow$$



① il lavoro è dunque l'area sotto la curva

$$\Rightarrow L = \frac{3}{2} \Delta t_1 \cdot \frac{P_H}{2} = \frac{3}{4} \Delta t_1 P_H$$

ES 2

$m = 1 \text{ kg}$ $A = 2 \text{ cm}$ $k = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ $x = \frac{A}{2}$

Qual è la sua velocità?

a) 1,5 m/s

b) 4,5 m/s

~~c) 3 m/s~~

Essendo il moto armonico

$$x = A \sin(\omega t)$$

$$\frac{A}{2} = A \sin(\omega t)$$

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \Rightarrow t = \frac{\arcsin(1/2)}{\sqrt{k/m}} = 0,17 \text{ s}$$

pongo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = A \omega \cos(\omega t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = 2,99 \text{ m/s}$$

→ METODO ALTERNATIVO (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA)

$$\frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ES 3

P = quantità di moto

E = energia

T = tempo

$$\frac{P \cdot D}{T}$$

cosa rappresenta?

a) POTENZA

~~b) MOMENTO DI UNA FORZA~~

c) ACCELERAZIONE

$$\frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$= \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

= $F \times r$ = OGGIERO AL MOMENTO DI UNA FORZA.

Es 4 date due leggi orarie $x(t) = 3 \sin(5t)$
 $y(t) = 6 \cos(5t)$

La traiettoria descritta è
 a) ellittica
 b) parabolica
 c) sinusoidale

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \sin^2(5t) \quad \left(\frac{y}{6}\right)^2 = \cos^2(5t)$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = \sin^2(5t) + \cos^2(5t) = 1 \quad \rightarrow \text{è un'ellisse}$$

metodo Runge

$$t = \frac{a \sin\left(\frac{x}{3}\right)}{5} \Rightarrow y = 6 \cos\left(a \sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

Es 5 date due leggi orarie $y(t) = 3 \sin^2(5t)$
 $x(t) = 45t$
 $y = 3 \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow$ ha un andamento sinusoidale

Es 6 un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ e velocità $= 1 \text{ m/s}$ si dirige verso una molla con costante elastica $K = 10^4 \text{ N/m}$

Quale sarà la massima compressione della molla?

- a) 1 cm
- b) 2 cm
- c) 4 cm

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

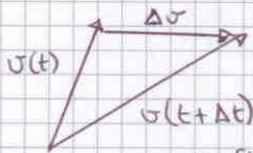
$$x = \sqrt{10^4} = 10^2 = 1 \text{ cm}$$

Fisica

APPROFONDIMENTO

→ DERIVATA DI UN VETTORE:

Considerando un vettore $\vec{v}$ funzione di una variabile scalare t , cioè una grandezza vettoriale la cui modulo e la cui ~~derivazione~~ direzione cambia al variare di t



$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$$

$$\Delta \vec{v} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

• Si definisce che la derivata di un vettore è ancora un vettore in quanto l'operazione equivale al prodotto di un vettore, $d\vec{v}$, per uno scalare $1/dt$

① il vettore derivato in genere non è parallelo a $\vec{v}$

REGOLE DI DERIVAZIONE

$$\frac{d}{dt}(a+b) = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{se } m \text{ è costante})$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \frac{da}{dt} \cdot b + a \frac{db}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}$$

La derivata di un vettore, essendo a sua volta un vettore non dipende per il significato e per la sua definizione dal sistema di riferimento

→ DERIVATA DI UN VERSORE:

Un versore è per definizione un vettore di modulo unitario, ciò che può cambiare in funzione di t è solo la direzione, ovvero il versore può compiere solamente una rotazione di un certo angolo $\Delta\theta$

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$$

• al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ la corda $\Delta \vec{u}$ tende ad un vettore infinitesimo $d\vec{u}$, perpendicolare a $\vec{u}(t)$ il cui modulo si confonde con l'arco



$$d\vec{u} = |\vec{u}(t)| d\theta = d\theta \Rightarrow d\vec{u} = d\theta \vec{u}_\perp$$

Essendo $\vec{u}_\perp$ un versore perpendicolare a $\vec{u}(t)$: si definisce DERIVATA DI VERSORE

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp$$

LA DERIVATA DI UN VERSORE È UN VETTORE PERPENDICOLARE AL VERSORE DI MODULO $d\theta/dt$, in generale diverso da 1

↳ IN ALTRE PAROLE $d\vec{u}/dt$ non è un versore

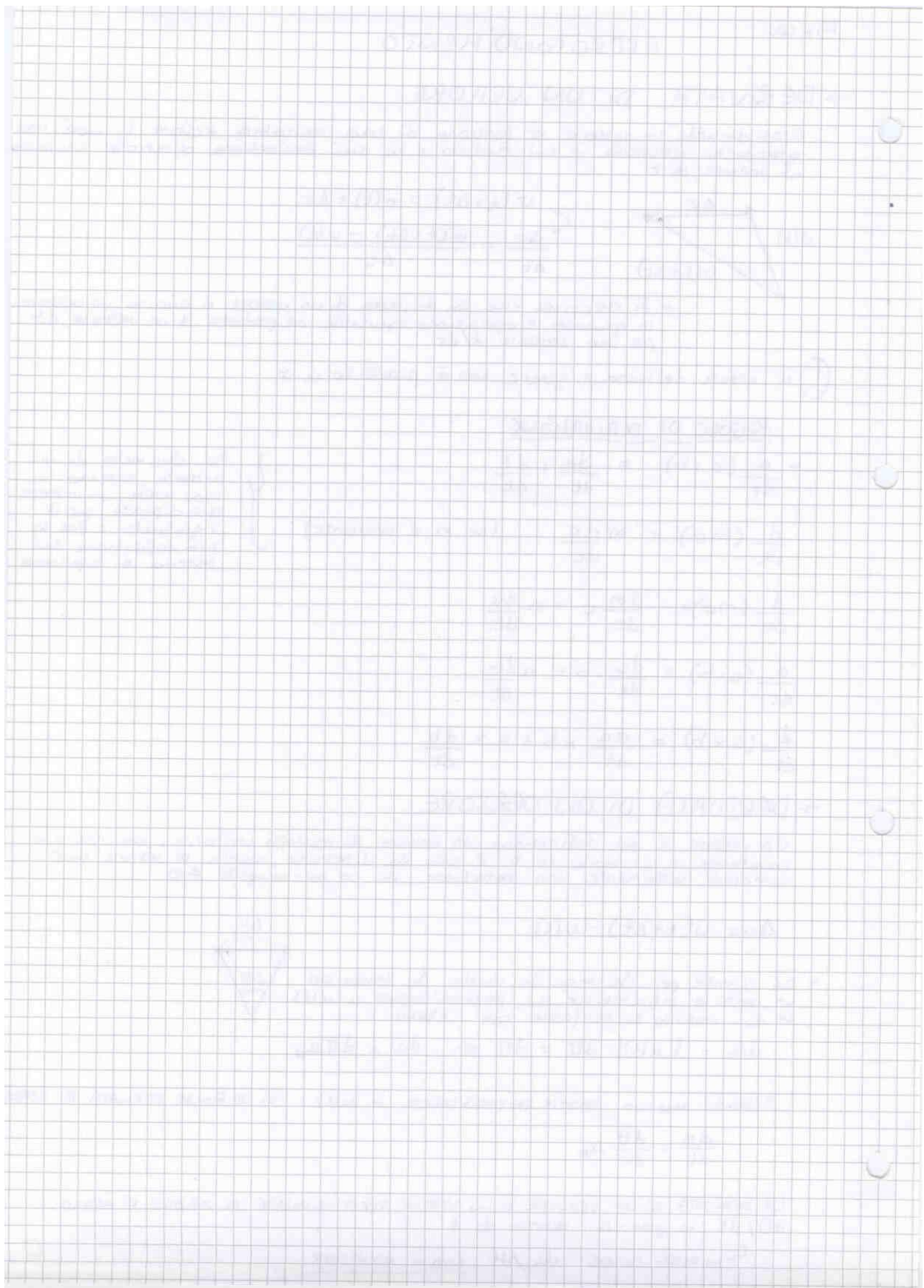
Sorgente : <http://holisi.hasanaj.com/>

Autore : HOLSI HASANAJ

Professore: SANTARSIERO

CORSO di Ingegneria INFORMATICA ROMA TRE

ANNO di produzione: 2010-2011



Sorgente : <http://holisi.hasanaj.com/>

Autore : HOLSI HASANAJ

Professore: SANTARSIERO

CORSO di INGEGNERIA INFORMATICA ROMA TRE

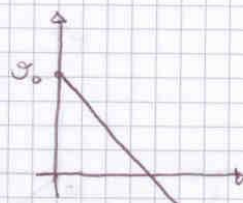
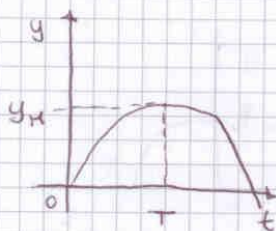
ANNO di PRODUZIONE: 2010-2011

I lezione
8/03/11



$$y_0 = 0$$
$$v_0 > 0$$

$$v(t) = v_0 - gt$$
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$



$$v(t) = 0 \Rightarrow v_0 - gT = 0$$

Relazione fra posizione e tempo velocità $\Rightarrow T = \frac{v_0}{g}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow a = v \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$v(x) = v(x(t))$$

* dove si calcola
la velocità nel tempo
per la 3a

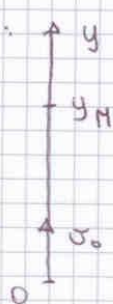
$$y_H = y(T) = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2$$
$$= \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2}$$

$$a = v \cdot \frac{dv}{dx} \quad \int_{x_1}^{x_2} a dx = \int_{v_1}^{v_2} v dv = \left. \frac{1}{2} v^2 \right|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \int_{x_1}^{x_2} a(x) dx$$
$$= \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = a(x_2 - x_1)$$
$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} x_1 = x(t_1) \\ x_2 = x(t_2) \\ v_1 = v(t_1) \\ v_2 = v(t_2) \end{cases}$$

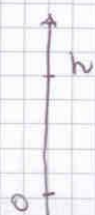
Es:



$$x_1 = 0 \quad v_1 = v_0 \quad x_2 = y_H \quad v_2 = 0 \quad a = -g$$

$$0 - v_0^2 = -2g(y_H - 0)$$

$$y_H = \frac{v_0^2}{2g}$$



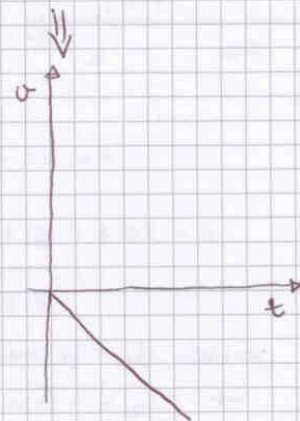
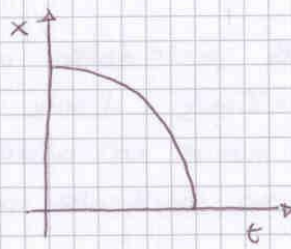
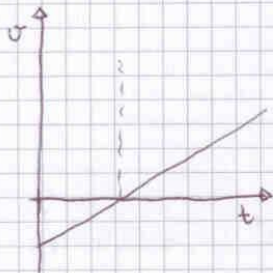
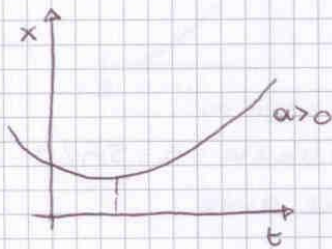
$$x_1 = h \quad v_1 = 0$$
$$x_2 = 0 \quad v_2 = v_{fin}$$
$$v_{fin}^2 - 0 = -2g(0 - h) = 2gh$$

$$\Rightarrow v_{fin}^2 = 2gh \Rightarrow v_{fin} = \pm \sqrt{2gh}$$

Fisica

MECCANICA

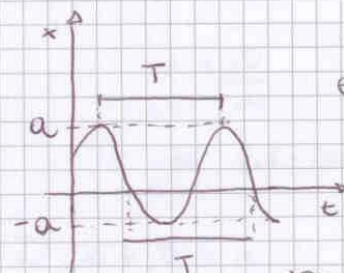
V Lezione
08/03/11



MOTO ARMONICO

$$x(t) = x(t+T)$$

periodo



dove a è
l'ampiezza

tra due creste
o tra due seni
(il periodo T)

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$

con A regola l'ampiezza
con T regola il periodo
con φ regola lo spostamento

Es: Un'automobile che procede alla velocità v_0 , deve fermarsi bruscamente. Sapendo che i freni producono una decelerazione costante si calcoli lo spazio che impiega a fermarsi e il tempo

$$v_0 = 100 \text{ km/h}$$

$$a = -9,3 \text{ m/s}^2$$

$$v_0 = \frac{100}{3,6} = 27,7$$

$$v_f = v_0 + at$$

$$\frac{-v_0}{a} = t$$

$$\frac{-27,7}{-9,3} = 2,9$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\begin{aligned} & 2,98 \cdot 27,7 + \frac{1}{2} (-9,3) \cdot 2,9^2 \\ & = 82,5 + \\ & = 41,57 \text{ m} \end{aligned}$$