Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi Matematica

-Preparazione Esame-

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi matematica

TEORIA

MAGGIORANTE: SIA $A \subset \mathbb{Q}$ UN NUMERO RAZIONALE M SI DICE MAGGIORANTE DI A SE $\forall a \in A \Rightarrow a \leq M$
SE AMMETTE UN MAGGIORANTE ESSO SI DICE LIMITATO SUPERIORMENTE
EX: $3/2$ RAPPRESENTA UN MAGGIORANTE PER IL SOTTOINSIEME $B = \{x \in \mathbb{Q} : x < 3/2\}$

ESTREMO SUPERIORE: SIA $A \subset \mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORMENTE. CI CHIEDIAMO SE TRA TUTTI I SUOI MAGGIORANTI NE ESISTA UNO CHE GODA DELLA PROPRIETÀ DI ESSERE IL PIÙ PICCOLO.
SE VERIFICA LE SEGUENTI PROPRIETÀ
1) $\Lambda \geq x \;, \forall x \in A$
2) $\forall n \in \mathbb{N} \;, \exists x \in A \;/\; x > \Lambda - \frac{1}{n}$
UN NUMERO CHE VERIFICA LE SEGUENTI PROPRIETÀ PRENDERÀ IL NOME DI ESTREMO SUPERIORE DI A $\Lambda = \sup A$
EX: SI HA $\sup B = 3/2$. INFATTI LA 1) È VERIFICATA PER DEFINIZIONE STESSA DI B. PER LA 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ TRA $3/2$ E $3/2 - 1/n$ CADONO INFINITI NUMERI

ESTREMO INFERIORE
$\forall A \subset \mathbb{R}$ LIMITATO INFERIORMENTE $\Rightarrow$ A AMMETTE SEMPRE L'ESTREMO ~~SUPERIORE~~ INFERIORE $\Lambda \in \mathbb{R}$ SI DICE ESTREMO INFERIORE DI A ($\inf A = \Lambda$)
1) $\Lambda \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in A \;/\; \bar{x} < \Lambda + \varepsilon$

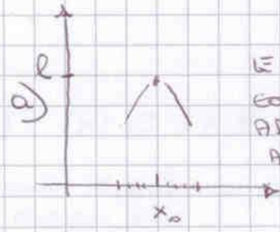
APPARTIENE AD DERIVATO DEL DOMINIO

LIMITE: (di f in un punto) $f : D \longrightarrow C$, $x \longmapsto y = f(x)$ $\quad x_0 \in DD$, $x_0 \in I$

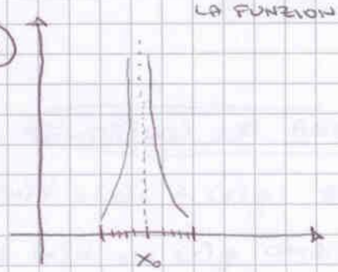
IL LIMITE DI UNA FUNZIONE PER $x \xrightarrow{\text{CHE TENDE}} x_0$ SERVE A STUDIARE IL COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE

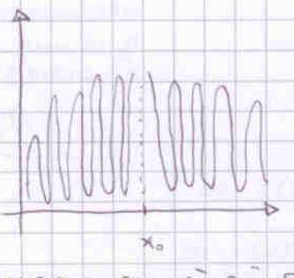
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} a)\ \ell & f \text{ converge a } \ell \in \mathbb{R} \\ b)\ \pm\infty & f \text{ diverge a } \pm\infty \\ c)\ f \text{ è irregolare} \end{cases}$$

(!) SE IL LIMITE DESTRO È DIVERSO DA QUELLO SINISTRO LA FUNZIONE È IRREGOLARE

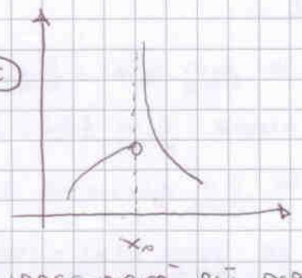
a)


LE IMMAGINI STANNO CONVERGENDO AD ℓ QUANDO x TENDE AD x_0 O PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

b)


c)


IRREGOLARITÀ PIÙ FORTE

c)


IRREGOLARITÀ PIÙ DEBOLE

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) =$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) =$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi matematica

TEORIA

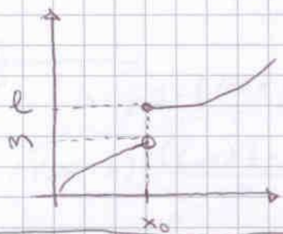
FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO:

$f: D \longrightarrow C$ $\qquad x_0 \in PD \cap D$ ha senso fare $f(x_0)$

$x \longmapsto y = f(x)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} f(x)$

f si dice CONTINUA IN x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

TEOREMA:
tutte le funzioni elementari sono funzioni continue nei rispettivi domini



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m$
} LA FUNZIONE È CONTINUA SOLO A DESTRA

CLASSIFICAZIONE DELLA DISCONTINUITÀ

1° → x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE SE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ED f CONVERGE SIA A DESTRA CHE A SINISTRA

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$ $\qquad l \neq m$

2° → x_0 SI DICE PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 2° SPECIE SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

Ex: $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

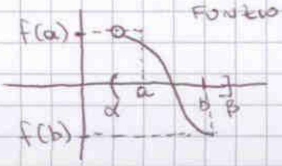
3° → x_0 SI DICE PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE SE: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\qquad l \neq f(x_0)$

Ex: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

→ **TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI**: SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO I E SIANO $a, b \in I$ $(a < b)$
SIA $c \in \mathbb{R}$ E COMPRESO TRA $f(a)$ e $f(b)$
$\Rightarrow$ ALLORA $\exists$ UN $\xi \in [a,b] \,/\, f(\xi) = c$

→ **TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI**: SIA f CONTINUA IN UN INTERVALLO I E SIANO $a, b \in I$ $(a < b)$
SIA $f(a) \cdot f(b) < 0$ ALLORA $\exists\, \xi \in (a,b) \,/\, f(\xi) = 0$

FUNZIONE CONTINUA



FUNZIONE DISCONTINUA

Analisi matematica

TEORIA

CONDIZIONI DI NON DERIVABILITÀ f NON È DERIVABILE IN x_0 SE

1) $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \begin{cases} m \in \mathbb{R} & m \neq l \\ \pm\infty \end{cases}$

x_0 SI DICE PUNTO ANGOLOSO PER f $(x_0, f(x_0))$ ANGOLO DI f

2) $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \mp\infty$

x_0 SI DICE PUNTO CUSPIDALE PER f $(x_0, f(x_0))$ CUSPIDE PER f

3) $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$ x_0 SI DICE PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE < ASCENDENTE $(+\infty)$ / DISCENDENTE $(-\infty)$

TEOREMA DI FERMAT: SIA $x_0 \in \mathring{D}_f$ UN PUNTO DI ESTREMO RELATIVO PER f. SE f È DERIVABILE IN x_0 ALLORA $f'(x_0) = 0$ => CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE

PUNTO DI FLESSO: SIA f DERIVABILE IN UN INTERVALLO I
f SI DICE CONVESSA IN I SE $\forall\, x_0, x \in I$ SI HA
$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
SI DICE CONCAVA SE $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

→ SIA f DERIVABILE IN $I_\delta(x_0)$ x_0 SI DICE P.TO DI FLESSO DI f SE f È CONCAVA (CONVESSA) IN $(x_0 - \delta, x_0)$ ED È CONVESSA (CONCAVA) IN $(x_0, x_0 + \delta)$

→ SIA f DERIVABILE IN $I_\delta(x_0)$ E SIA x_0 P.TO DI FLESSO DI f SE f AMMETTE IN x_0 DERIVATA SECONDA ALLORA $f''(x_0) = 0$

TEOREMA: SIA f DERIVABILE 2 VOLTE IN UN INTERVALLO I
SE $f''(x) > 0$ IN I => f È CONVESSA IN I
(E NON SI ANNULLA IN ~~UN~~ TUTTO UN SOTTO INTERVALLO $I' \subseteq I$

TEOREMA: SIA f DERIVABILE IN $I_\delta(x_0)$ E DERIVABILE 2 VOLTE IN $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. ALLORA
SE $f''(x) > 0$ IN $(x_0 - \delta, x_0)$ E $f''(x) < 0$ IN $(x_0, x_0 + \delta)$
SE $f''(x) < 0$ IN $(x_0 - \delta, x_0)$ E $f''(x) > 0$ IN $(x_0, x_0 + \delta)$

INTEGRALE: SIA f CONTINUA IN $[a, b]$

$[x_{n-1}, x_n]$ $\quad x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$ $\quad \{\sigma_n\}$ SUCC. SOMME INTEGRALI

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \in \mathbb{R}$ (SOMMA INTEGRALE)

TEOREMA: SIA f CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a, b]$ ALLORA $\{\sigma_n\}$ CONVERGE E SI DEFINISCE L'INTEGRALE DEFINITO RELATIVO ALL'INTERVALLO $[a, b]$ DELLA f CONTINUA

Ex: $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \Rightarrow \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} c =$

$= \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot c \sum_{i=1}^{n} 1^{\Rightarrow n} = c(b-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = c(b-a) = \int_a^b c\, dx$

Analisi matematica

4/4

a/b

TEORIA

FORMULA DI TAYLOR

f CONTINUA IN $I_\delta(x_0)$ E DERIVABILE n VOLTE IN x_0

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$

(DETERMINARE GLI $(n+1)$ COEFFICIENTI)

Ex: $P_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$P_1(x_0) = f(x_0) \quad P_1'(x_0) = f'(x_0)$

GENERALE

$\to P_n^{(i)}(x) = f^{(i)}(x_0) \quad \forall i = 0,1,\dots,n$ $\qquad i=1\ P_n'(x)$ $\quad i=2\ P_n''(x)$

$\Rightarrow a_i = \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (POLINOMIO DI TAYLOR)

POLINOMIO DI McLAURIN

SE $x_0 = 0 \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

TEOREMA: SIA $f \in C^{n+1}(I_\delta(x_0))$

ALLORA $\forall x \in I_\delta(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

DOVE c È COMPRESO TRA x E x_0

$\to$ FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE n DELLA FUNZIONE f CON PUNTO INIZIALE x_0, CON RESTO ESPRESSO IN TERMINI DI LAGRANGE

LANDAU: SIANO f E g INFINITESIME PER $x \to x_0$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$f = o[g]$ per $x \to x_0$ SE $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ LA FUNZIONE f È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A K

$f = o[1]$ per $x \to x_0 \Rightarrow = 0$

TEOREMA: SIA $f \in C(I_\delta(x_0))$ ALLORA $\forall x \in I_\delta(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n]$$

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

- INTORNO SFERICO $I_\delta(P_0) = \{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / d(PP_0) < \delta\}$
  $\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$
- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE LIMITATO SE $\exists\, \delta > 0 \,/\, A \subset I_\delta(\vec{0})$
- P_0 SI DICE PUNTO INTERNO $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ DI A $(P_0 \in \mathring{A})$ SE $\exists\, \delta > 0 \,/\, I_\delta(P_0) \subset A$
- $A \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE APERTO SE $A = \mathring{A}$
- $\complement A = \mathbb{R}^2 \setminus A$
- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE CHIUSO SE IL SUO COMPLEMENTARE È APERTO
- $P_0 \notin A$ SI DICE ESTERNO AD A SE $P_0 \in \complement \mathring{A}$
- $P_0 \in \partial A$ SE $P_0 \notin \mathring{A}$ E $P_0 \notin \complement\mathring{A}$ SI DICE PUNTO DI FRONTIERA
- $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. P_0 SI DICE P.TO DI ACCUMULAZIONE DI A SE $\forall \delta > 0$ SI HA CHE $(I_\delta(P_0) \cap A) \setminus \{P_0\} \neq \emptyset$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

TEORIA

SUCCESSIONE NUMERICA: UNA SUCCESSIONE NUMERICA È UNA SUCCESSIONE DEFINITA SOLO SUI NUMERI NATURALI (N) OPPURE SU UN SOTTOINSIEME DI N PER LA QUALE È POSSIBILE CALCOLARE IL SUO VALORE LIMITE AL DIVERGERE DELLA VARIABILE A $+\infty$. SE IL RISULTATO DI TALE LIMITE È UN NUMERO FINITO LA SUCCESSIONE SARÀ CONVERGENTE, SE IL SUO RISULTATO È $\pm\infty$ LA SUCCESSIONE SARÀ DIVERGENTE, SE IL LIMITE NON ESISTE LA SUCCESSIONE SARÀ INDETERMINATA

→ LE SUCCESSIONI POSSONO AVERE ANDAMENTI MOLTO DIVERSI TRA LORO. IN BASE AL SEGNO DEI SUOI TERMINI UNA SUCCESSIONE SI DICE
- POSITIVA SE PER OGNI n L'IMMAGINE ASSUME SOLO VALORI POSITIVI OVVERO IL GRAFICO È SEMPRE SOPRA L'ASSE DELLE ASCISSE $a_n > 0 \ \forall n$ SPECULARMENTE SI PUÒ DEFINIRE UNA SUCCESSIONE ~~OVUN~~ OVUNQUE NEGATIVA
- ASINTOTICAMENTE (O DEFINITIVAMENTE) POSITIVA (NEGATIVA) QUANDO DA UN CERTO TERMINE IN POI n^* I SUCCESSIVI SONO SEMPRE POSITIVI OVVERO DA UN PUNTO IN POI NON SI SCENDE MAI SOTTO L'ASSE DELLE ASCISSE $a_n > 0 \quad \forall n > n^*$

→ SUCCESSIONI MONOTONE: SUCCESSIONI CHE PRESENTANO UNA REGOLARITÀ NELL'EVOLUZIONE DELLA SERIE DI TERMINI, OVVERO IL SUCCESSIVO È SEMPRE MAGGIORE (MINORE) DEL PRECEDENTE OPPURE UGUALE, VENGONO DETTE MONOTONE

TEOREMA (SULLE SUCCESSIONI MONOTONE:)
OGNI SUCCESSIONE MONOTONA È REGOLARE, CIOÈ AMMETTE LIMITE. IN PARTICOLARE OGNI SUCCESSIONE MONOTONA E LIMITATA È CONVERGENTE CIOÈ AMMETTE LIMITE FINITO

Dimostrazione: SIA a_n UNA SUCCESSIONE CRESCENTE E LIMITATA CON $l = \sup\{a_n\}$, FISSATO UN $\varepsilon > 0$ ESISTE $\nu \,/\, l - \varepsilon < a_\nu$

$$a_n \geq a_\nu \quad \forall n > \nu \Rightarrow l - \varepsilon \leq a_\nu \leq a_n \leq l < l + \varepsilon$$

CIOÈ PER DEFINIZIONE DI LIMITE DI UNA SUCCESSIONE RISULTA

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

INTEGRALE: SIA f CONTINUA IN $[a,b]$. SUDDIVIDENDO TALE INTERVALLO IN n SUB-INTERVALLI DI TIPO $[x_{s-1}, x_s]$ CON $s = 1, 2, \dots, n$ E $x_0 = a$ $x_n = b$. PER CIASCUN SUB-INTERVALLO SCEGLIAMO UN PUNTO t_s LA CUI IMMAGINE $f(t_s)$ E COSTRUIAMO IL RETTANGOLINO CHE HA PER BASE L'INTERVALLO $[x_{s-1}, x_s]$ E PER ALTEZZA $f(t_s)$; L'AREA DELLA FIGURA COSTITUITA DA TUTTI I RETTANGOLINI COSÌ COSTRUITI È DATA DALLA SOMMA

$$\sum_{s=1}^{n} f(t_s)(x_s - x_{s-1})$$

IL MODO DI SUDDIVIDERE GLI INTERVALLI ~~DEVE~~ PUÒ ESSERE ~~TOTALMENTE~~ ARBITRARIO IN QUANTO LA CURVA È UNIFORMEMENTE CONTINUA ALL'INTERNO DEL SINGOLO INTERVALLINO

SE SI SUDDIVIDE UN INTERVALLO CHIUSO $[a,b]$ IN n SOTTO INTERVALLI $[x_s, x_{s-1}]$ D'UGUALE AMPIEZZA $x_s - x_{s-1} = \frac{b-a}{n}$ E SI SCEGLIE IN OGNI INTERVALLO UN PUNTO ARBITRARIO t_s

$$\sigma_n = \sum_{s=1}^{n} f(t_s)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{s=1}^{n} f(t_s)$$

$\Rightarrow$

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D_f$ per cui $|x - x_0| < \delta_M$ si ha $f(x) > M$

LIMITE DI UNA FUNZIONE ALL'INFINITO: sia D illimitato superiormente

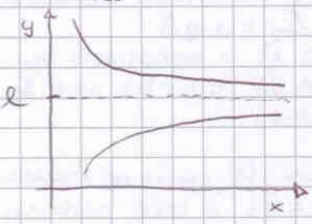
$f: D \to C$
$x \mapsto y = f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$
a) $\ell \in \mathbb{R}$ f converge a ℓ
b) $\pm\infty$ f diverge a $\pm\infty$
c) $\nexists$ f è irregolare per $x \to \infty$

Se la funzione converge o diverge viene detta regolare. Inoltre se f è regolare per $x \to \alpha$ allora λ è unico

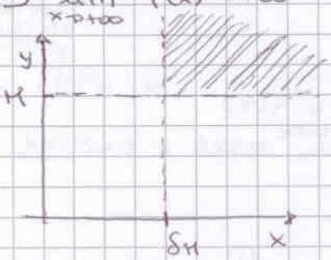
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in D_f$ per cui $x > \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$



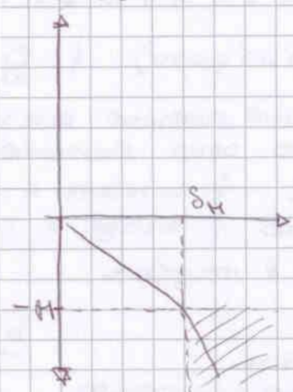
$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $x > \delta_M$ si ha $f(x) > M$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D$ per cui $x > \delta_M$ si ha $f(x) < -M$



TEOREMA DEL CONFRONTO: siano f, g, h tali che $\forall x \in I_\delta(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ si ha $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

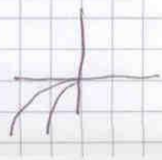
Siano $g(x)$ ed $h(x)$ regolari per $x \to \alpha$ allora

1) se $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$

2) se $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$

3) se $\lim_{x \to \alpha} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$

f, g, h sono definite nell'intorno di $\{\alpha\}$
h è una funzione maggiorante di f
g è una funzione minorante di f



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

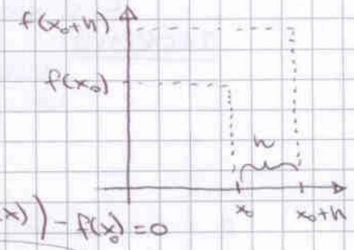
→ **TEOREMA DI WEIERSTRASS** SIA f CONTINUA IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$ ALLORA f È DOTATA DI UN MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

DERIVATA: SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA IN OGNI PUNTO DELL'INTERVALLO (a,b). DICIAMO CHE f È DERIVABILE IN UN PUNTO x DI (a,b) SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$$

ℓ si chiama DERIVATA PRIMA DI $f(x)$

TEOREMA: (CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ)
SIA f DERIVABILE IN x_0 ALLORA f È CONTINUA IN x_0.
f DERIVABILE IN $x_0 \Rightarrow f$ CONTINUA IN x_0 LA CONDIZIONE È NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE
Ex: il modulo di x



DIMOSTRAZIONE: (Th) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - f(x_0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) \overset{?}{=} 0 \qquad \lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}}_{f'(x)}\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = 0$$

TEOREMA (DERIVABILITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE)
SIA $y=f(x)$ CONTINUA E INVERTIBILE ALMENO IN $I_\delta(x_0)$ E DERIVABILE NEL PUNTO x_0 SIA $f'(x_0)\neq 0$ ALLORA LA FUNZIONE INVERSA $x=g(y)$ È DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ E SI HA

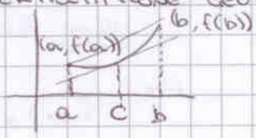
$$\frac{dg}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)} \qquad \text{DOVE } x_0 = g(y_0)$$

SE $f'(x_0)=0$ ALLORA g NON È DERIVABILE IN y_0

SE $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ ALLORA g È DERIVABILE IN y_0 E SI HA $\frac{dg}{dy}(y_0)=0$

TEOREMA DI LAGRANGE (Teorema fondamentale della derivabilità)
SIA f CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b) ALLORA
$\exists\, c\in(a,b) \,/\, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



TEOREMA DI DE L'HOPITAL

SIANO f E g DERIVABILI IN $I_\delta(\lambda)\setminus\{\lambda\}$ E SIANO INFINITESIME (O DIVERGENTI) PER $x\to\lambda$

SIA $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ REGOLARE PER $x\to\lambda$ E SI HA CHE $\lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\lambda}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

TEOREMA SIA f CONTINUA IN UN INTORNO OPPORTUNO DI $I_\delta(x_0)$ E DERIVABILE IN $I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$. SE $f'(x)$ È CONVERGENTE PER $x\to x_0$ ALLORA f È DERIVABILE ANCHE IN x_0 E SI HA CHE $f'(x) = \lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell\in\mathbb{R}$
POSSO AGGIUNGERE ANCHE x_0 E VALE ℓ

(!) QUESTO TEOREMA SERVE A NON UTILIZZARE IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

TEOREMA DEL CONFRONTO: (O DELLA MONOTONIA)

SIANO f e g CONTINUE IN $[a,b]$ E SIA $f(x) < g(x)$ IN $[a,b]$

ALLORA

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

TEOREMA DELLA MEDIA

SIA f CONTINUA IN $[a,b]$. ALLORA $\exists\, c \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

$$m_f(b-a) \le f(c)(b-a) \le M_f(b-a)$$

TEOREMA DELLA MEDIA PESATA

SIANO f e g CONTINUE IN $[a,b]$ e $g(x) \ge 0$ (≤ 0) IN $[a,b]$

ALLORA $\exists\, c \in [a,b] \,/$

$$m \cdot \ell \le \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx \le M \cdot \ell$$

(!) IL MASSIMO ED IL MINIMO ESISTONO SEMPRE IN UN INTERVALLO CHIUSO PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

I TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO I E SIA $a \in I$.

SIA

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{dove } x \in I$$

ALLORA F È DERIVABILE IN I E SI HA

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

II TEOREMA DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA f CONTINUA IN $[a,b]$ E SIA G UNA PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$

ALLORA

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

SERIE NUMERICHE $\{a_n\} \longrightarrow \{s_n\}$

LA SERIE NUMERICA È UNA PARTICOLARE SUCCESSIONE, LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI COSTRUITA

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R} & \text{CONVERGENTE} \\ \pm\infty & \text{DIVERGENTE} \\ \nexists & \text{IRREGOLARE} \end{cases}$$

SE IL LIMITE CONVERGE A S QUEST'ULTIMA PRENDE IL NOME DI "SOMMA DELLA SERIE

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \{s_n\} \equiv \lim_{n \to +\infty} S_n$$

a_k È IL TERMINE GENERICO DELLA SERIE

IL PROBLEMA NELLO STUDIO DELLE SERIE È STUDIARE IL CARATTERE IN QUANTO È DIFFICILE ~~RICONDURRE~~ SCRIVERE LA SERIE IN FORMA CHIUSA INFATTI IN GENERALE CONOSCIAMO SOLO LA ~~SO~~ FORMA CHIUSA DI DUE SERIE

1) LA SERIE TELESCOPICA O DI MENGOLI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2) SERIE GEOMETRICA

$$q \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cancel{q^{n-2}} + \cancel{q^{n-1}} + q^n$$

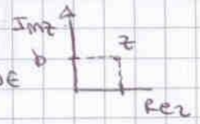
$$q S_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \lim S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n \to \infty} q^n$$

- Si dice spezzata in $\mathbb{R}^2$ l'unione di un numero finito di segmenti uniti a due a due
- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso (per archi) se $\forall P_1, P_2 \in A$ $\exists$ una spezzata contenuta in A di estremi P_1, P_2

NUMERI COMPLESSI: i numeri complessi vengono generalmente rappresentati nel piano di Gauss

$\mathbb{C}$ è un campo, non è possibile inoltre stabilire una relazione d'ordine → non sono presenti l'assioma d'ordine e l'assioma di completezza



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$i = (0,1) \qquad i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 \in \mathbb{R}$$

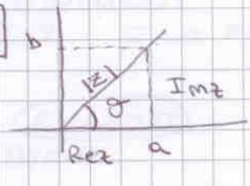
TEOREMA: un equazione di n-esimo grado ammette n soluzioni nel campo dei

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$$

Coniugato di z

$$\bar{z} = a - ib \qquad z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 > 0$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \vartheta = \operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi]$$



$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos(\operatorname{Arg} z) \\ \operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin(\operatorname{Arg} z) \end{cases}$$

Se $\operatorname{Re} z = 0$ e $\begin{cases} \operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Arg} z = \pi/2 \\ \operatorname{Im} z < 0 \Rightarrow \operatorname{Arg} z = -\pi/2 \end{cases}$

Se $\operatorname{Re} z > 0$ $\quad \dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = tg(\operatorname{Arg} z) \quad \operatorname{Arg} z = arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$

Se $\operatorname{Re} z < 0$ e $\operatorname{Im} z > 0$ $\Rightarrow \operatorname{Arg} z = arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi$

Se $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Im} z < 0$ $\Rightarrow \operatorname{Arg} z = arctg\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) - \pi$

FORMULA DI EULERO $\quad e^{ib} = \cos b + i \sin b$

$$z = \cancel{|z|}\ a + ib = |z| \{\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z\} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$$

Radice numero complesso: $z^n = |z|^n \{\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z\}^n$ → formula di De Moivre

$$z^n = |z|^n \{\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z\}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L'equazione differenziale è una particolare equazione funzionale in cui compaiono le derivate ⇒ ordine di derivazione: massima derivata che compare

a) Equazione differenziale a variabili separabili

$$f'(x) = u(x) \cdot v([f(x)]) \Rightarrow y' = u(x) \cdot v(y)$$

b) Equazione differenziale lineari I ordine

$$y' + a(x) y = b(x)$$

c) Equazione differenziale lineare di II° ordine a coefficienti costanti

$$y'' + a y' + b y = g(x)$$

QUEST' ULTIMA È DETTA SOMMA INTEGRALE

→ L'INTEGRALE SECONDO RIEMANN DI f NELL'INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a, b]$ È IL LIMITE PER n CHE TENDE AD INFINITO DELLA SOMMA INTEGRALE

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{s=1}^{n} f(t_s)$$

SE TALE LIMITE ESISTE FINITO E NON DIPENDE DALLA SCELTA DEI PUNTI t_s

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{s=1}^{n} f(t_s)$$

INTEGRALE INDEFINITO: $\int f(x)\,dx$ INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI PRIMITIVE DI $f(x)$ (CHE È LA FUNZIONE) NEL SUO RISPETTIVO INTERVALLO DI CONTINUITÀ