Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi Matematica

Analisi Matematica

I lezione
4/10/10

Numeri Reali $\mathbb{R}$
- vengono scoperti nella fine dell' 800

$\mathbb{N}$ somma prodotto

Assiomi di $\mathbb{N}$ (postulati)
- fissati in maniera insindacabile (non possono essere dimostrate)

1) l'insieme dei numeri naturali è chiuso rispetto a somma e prodotto

→ Per ogni coppia di elementi di $\mathbb{N}$ si ha che la somma e il prodotto tra due numeri naturali, il risultato sarà un numero naturale

$$\left(\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{matrix} a+b \in \mathbb{N} \\ a \cdot b \in \mathbb{N} \end{matrix}\right)$$

Relazione di ugu (=)
1) $\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = a$
proprietà riflessiva
2) $\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a = b \Leftrightarrow b = a$
proprietà simmetrica
3) $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ se $a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$
proprietà transitiva

2) proprietà commutativa
$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b = b+a$
$a \cdot b = b \cdot a$

3) Proprietà associativa:
$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$
$(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$

4) proprietà distributiva
$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

ci dice solamente che 1 è l'unico elemento neutro rispetto al prodotto
(1 e' l'elemento neutro in $\cdot$)

5) $1 \in \mathbb{N}$ e $\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot 1 = a$
esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{E} \in \mathbb{N} \mid \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{E} \cdot a = a$

$1 \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E} = 1$ 1 e $\mathcal{E}$ sono la stessa cosa!

Definizione: $\forall a \in \mathbb{N}$, il numero $a+1$ si dice successivo di a

esiste un rapporto tra rappresentazione geometrica e rappresentazione analitica

sto aggiungendo

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$$

6) $0 \mid \forall a \in \mathbb{N}_0$ si ha che $a + 0 = a$
lo zero è l'elemento ~~zero~~ neutro rispetto alla somma

DIMOSTRAZIONE:
Sia $\mathcal{E} \in \mathbb{N}_0 \mid \forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathcal{E} + a = a \Rightarrow \mathcal{E} = 0$ per il 6° assioma

Esercizio $\forall a \in \mathbb{N}_0$ si ha $a \cdot 0 = 0$ $\quad a = a \cdot 1 \quad a = (1+0) \cdot a$

$a = (1+0) \cdot a = a + 0a = a + a \quad 0a$

$$\boxed{a = a + a0}$$

II lezione
5/10/10

$\nexists\, \varepsilon \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}_0$
non esiste

$\forall a \in \mathbb{N}_0$ si dice opposto di a il numero "$-a$" $\mid a + (-a) = 0$

Insieme dei numeri relativi $\mathbb{Z}$
$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z}$

DIMOSTRAZIONE
se $a \neq 0 \Rightarrow \nexists\, \varepsilon \in \mathbb{N}_0 \mid a + \varepsilon = 0$
$\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{N}$
l'insieme di due num. naturali è chiuso rispetto alla somma, quindi il risultato è per è sicuramente un numero naturale → non chiaro
ecco perchè tolgo lo zero dai numeri naturali

ASSIOMA 7) $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists$ "$-a$" $\in \mathbb{Z} \mid a + (-a) = 0$

Dimostrazione: Unicità dell'elemento opposto

$\forall a \in \mathbb{Z}$ sia $\varepsilon \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon + a = 0 \qquad -a = -a + 0 = -a + (a + \varepsilon)$

$-a + (a + \varepsilon) = ((-a) + a) + \varepsilon = 0 + \varepsilon = \varepsilon$ quindi $-a = \varepsilon$
non esistono due numeri diversi per indicare l'opposto del numero dato

Esercizio: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si ha $a(-b) = (-a)b = -ab$

Dimostrazione
$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a(0) = a0 = 0$

Dimostrazione $\forall a \in \mathbb{Z}$ si ha $-(-a) = a$

$a = a + 0 = a + (a + (-a)) =$

$= (a + (-a)) + (-(a)) = (-(-a))$

$\mathbb{Z}$ è insieme induttivo
cioè $\forall a \in \mathbb{Z}$ è possibile stabilire per definizione l'elemento successivo
induttivo significa che non c'è nessun elemento che si interpone tra n e $n+1$

Dimostrazione: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità

$\mathbb{Z}$ è discreto e numerabile ovvero ha un rapporto biunivoco con $\mathbb{N}$

Problema sia $a \in \mathbb{Z} \quad \exists\, \varepsilon \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon a = 1$
non è vero
questo ci porterà a determinare nuovi numeri che lo risolveranno

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{Z} \\ 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & -1 \end{array}$$

$\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ si dice inverso di a l'elemento "a^{-1}" $\mid a \cdot (a^{-1}) = 1$

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$

analisi matematica

II lezione
5/10/10

$$\mathbb{Q} = \{ n \cdot d^{-1}, \ \forall n \in \mathbb{Z} \ e \ \forall d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$$

ASSIOMA 8) $\forall a \in \mathbb{Q}$, con $a \neq 0$ ($\mathbb{Q} \setminus \{0\}$) $\exists a^{-1} \in \mathbb{Q} \mid a a^{-1} = 1$

Dimostrare: dato ogni elemento a esiste solo un elemento inverso
$$a^{-1} = a^{-1}(a \cdot \varepsilon) = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \qquad \varepsilon = a^{-1}$$

Gli otto assiomi si dicono assiomi di campo
$\mathbb{Q}$ non è induttivo: non si può stabilire il successivo di un numero razionale

ASSIOMI DELL'ORDINE: (fissano l'ordinamento di $\mathbb{Q}$) ← dimostrare $0 = -0$

$\mathbb{Q}^+ \subsetneq \mathbb{Q}$
1) $\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}^+, \ a \cdot b \in \mathbb{Q}^+$
2) $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}^+$ oppure $-a \in \mathbb{Q}^+$
3) $0 \notin \mathbb{Q}^+$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$ allora $a < b$ se $b + (-a) \in \mathbb{Q}^+$

→ con il teorema di Pitagora osservarono che i numeri razionali hanno una corrispondenza univoca con la retta
• non posso commensurare le misure con i numeri razionali

DIMOSTRAZIONE: $\nexists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2$

$\exists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2 \qquad x = \frac{n}{d}$ $\qquad n \in \mathbb{Z} \quad d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ con n e d comprimi

$$x^2 = \frac{n^2}{d^2} = 2 \Rightarrow n^2 = 2d^2 \Rightarrow n^2 \text{ è pari} \Rightarrow n \text{ è pari}$$

(dimostrazione se n fosse dispari $n = 2k+1$
$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(k^2 + 2k) + 1$)

$n = 2k$ dove $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad 4k^2 = 2d^2 \qquad d^2 = \underbrace{2k^2}_{\text{è pari}}$

e se d^2 è pari anche d è pari ⇒ se entrambi sono pari non è possibile perché contraddice alle ipotesi iniziali

→ non si possono rappresentare sotto forma di frazione tutti i numeri.
→ l'insieme dei numeri razionali non è continuo
$\mathbb{Q}$ è un insieme discreto come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ in quanto si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{N}$

Trovare un algoritmo che non trascuri nessun numero $\mathbb{Q}$

$\frac{n}{d} \qquad n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$(n, d) \quad \rightarrow \mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^+$		$\mathbb{N}$
1 (1,1)	↔	1
2 (2,1)	↔	2
1/2 (1,2)	↔	3
		4

Sia $A \subset \mathbb{Q}$

DEFINIZIONE: $M \in \mathbb{Q}$ si dice maggiorante di A se ~~ge~~ $\forall x \in A$ si ha che $x \leq M$

DEFINIZIONE: $A \subset \mathbb{Q}$, A si dice limitato superiormente se ammette un ~~maggiormente~~ ~~ante~~ altrimenti si dice illimitato superiormente

DIMOSTRAZIONE: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{N}$ è illimitato

bisogna stabilire che $\mathbb{N}$ non ha un maggiorante

$$\exists M \in \mathbb{Q} \qquad n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$M = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}) \qquad n < \frac{p}{q} \qquad p < \frac{p}{q}$$

$q < 1$ contraddizione in quanto non esiste un numero minore di 1

Esempio di un insieme che ha infiniti elementi e non è ~~[illegible]~~ illimitato superior.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

0 1/3 1/2 1

DEFINIZIONE: $m \in \mathbb{Q}$ si dice minorante di A se $\forall x \in A$ si ha $x \geq m$

DEFINIZIONE: A si dice limitato inferiormente se ammette un minorante altrimenti si dice illimitato inferiormente.

11/10/10
III lezione

$A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente

DEFINIZIONE: $M \in \mathbb{Q}$ si dice massimo di A ($\max A$) se si ha
1) $\forall x \in A \Rightarrow x \leq M$
2) $M \in A$

Es: $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \frac{1}{2} \right\}$

$\frac{1}{2} = \max A$

$A \subset \mathbb{Q}$ limitato inferiormente

DEFINIZIONE: $m \in \mathbb{Q}$ si dice $\min A$ se si ha
1) $\forall x \in A \Rightarrow x \geq m$
2) $m \in A$

Esercizio: si $A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente e siano M e $M' \in \mathbb{Q}$ massimi di A

TESI: $M = M'$

DIMOSTRAZIONE:

$$\underbrace{M \leq M' \qquad M' \leq M}_{M = M'}$$

$M \leq M'$ $\begin{cases} M \in A \\ M' \text{ è maggiorante di } A \end{cases}$

$M' \leq M$ $\begin{cases} M' \in A \\ M \text{ è maggiorante di } A \end{cases}$

Sia $A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente
si può trovare il più piccolo tra i maggioranti = estremo superiore

DEFINIZIONE: ~~si dice~~ $\Lambda \in \mathbb{Q}$ - si dice estremo superiore $(\sup A) = \Lambda$

se: 1) ~~Λ~~ $\forall x \in A$, $x \leq \Lambda$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{x} \in A \mid \bar{x} > \Lambda - \frac{1}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \bar{x} \in A \mid \bar{x} > \Lambda - \frac{1}{n}$$

caso particolare

Analisi Matematica

III lezione
11/10/10

2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \bar{x} \in A \mid \bar{x} > \Lambda - \frac{1}{n}$ → non esiste un maggiorante più piccolo di Λ

$\Lambda - \frac{1}{n}$, Λ, $\bar{x} \in A$

Es. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{1}{2}\}$

$1/2 \notin A$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \bar{x} \in A / \bar{x} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

$1/2 - 1/n$, $1/2$

$\sup A = \frac{1}{2}$

Se $\exists$ il massimo, quest'ultimo coincide con l'estremo superiore

Sia A lim. superiormente
$A \subset \mathbb{Q}$

Siano $\Lambda = \sup A$ e $M = \max A$
tesi $\Lambda = M$

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = 1/n, \forall n \in \mathbb{N}\}$

0, 1/4, 1/2, 1

DIMOSTRAZIONE:
$\forall x \in A,\ x \leq 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \leq 1$

$\max A = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup A = 1$

Se il ~~max~~ minimo esiste è il più grande dei minoranti

Es: $A = \{x \in \mathbb{Q} / x = 1 - \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$

0, 1/2, 2/3

$\min A = 0 = \inf A$

Dimostrazione

$\forall x \in A \quad 0 \leq x$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{n}$

$n - 1 \geq 0$

$\max A = \nexists$

$1 \notin A$

Dimostrazione

1) $1 \geq x \quad \forall x \in A$
$1 \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1 è un maggiorante

2) 1 è il più piccolo tra i maggioranti

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \bar{x} \in A \mid \bar{x} > 1 - \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid$

$1 - \frac{1}{\bar{n}} > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\bar{n}} < \frac{1}{n}$

$\bar{n} > n$

$A = \{ x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 2 \} \Rightarrow \nexists \Lambda \in \mathbb{Q} / \Lambda = \sup A$ IV lezione 12/10/10

$A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente

$\exists$ infiniti maggioranti di A $\Rightarrow \Lambda$ si dice estremo sup. di A se
1) $\Lambda \geq x, \forall x \in A$
2) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \; \bar{x} \in A \mid \bar{x} > \Lambda - \frac{1}{n}$

$\rightarrow \Lambda \in \mathbb{Q}$
$\rightarrow \Lambda \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ introduciamo un ente numerico nuovo, e' insieme dei numeri irrazionale

$\Lambda \in \mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \{ \sup A, \forall A \subset \mathbb{Q}$ con sup $\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists P \in r$
che rappresenta geometricamente x
corrispondenza biunivoca tra numeri e retta

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

ASSIOMA 9)
di completezza

$\forall A \subset \mathbb{R}$ lim. superiormente allora A ammette sempre l'estremo superiore

DEFINIZIONE: $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di $A \subset \mathbb{R}$ se
se $M \geq x, \; \forall x \in A$

DEFINIZIONE: $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se ammette un maggiorante

DEFINIZIONE: $M \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A (max A), ($A \subset \mathbb{R}$ lim. sup) se:
1) $M \geq x \quad \forall x \in A$
2) $M \in A$

DEFINIZIONE: sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente $\Lambda \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di A ($\Lambda = \sup A$)
1) $\Lambda \geq x, \; \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \bar{x} \in A \mid \bar{x} > \Lambda - \varepsilon \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

vale anche per l'estremo inferiore

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE: sia $x \in \mathbb{R} \mid n \leq x \; \forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ è lim. tato $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \Lambda = \sup \mathbb{N}$ (per l'assioma di completezza)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq \Lambda \qquad n+1 \leq \Lambda \Rightarrow n \leq \Lambda - 1$

assurdo non si può essere un maggiorante minore di Λ che e' l'estremo superiore.

$\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{I}$ sono densi rispetto all'insieme R

Analisi matematica

IV lezione 12/10/10

Intervalli: - siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $(a < b)$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ $\mathbb{R}$ è un insieme continuo

Esercizi: determinare utilizzando la definizione dell'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme. d'esame

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n}{n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

$1/3 \quad 1/2 \quad 3/5 \quad 1$

$x = \frac{n}{n+2} < x_s = \frac{n+1}{n+3}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3} \Rightarrow n^2 + 3n < n^2 + 3n + 2 \quad 0 < 2$

$\min A = 1/3$

ext. inferiore $A = 1/3$

$\max A \ \nexists$ DIMOSTRARE

ext. $\sup A = 1 \notin A$

1) $1 \ge x \quad \forall x \in A$

$1 \ge \frac{n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$2 \ge 0$ è sempre vera

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in A \mid \bar{x} > 1 - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \frac{\bar{n}}{\bar{n}+2} > 1 - \varepsilon$

$\frac{n}{n+2} > 1 - \varepsilon \quad \bar{n} > \bar{n} - \varepsilon\bar{n} + 2 - 2\varepsilon$

$\varepsilon\bar{n} > 2(1-\varepsilon)$

$\bar{n} > \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$

l'insieme dei numeri naturali è illimitato rispetto a $\mathbb{R}$

Analisi Matematica

II lezione
14/10/10

Es: Sia $c = \inf A$ $\quad A \subset \mathbb{R}$ illimitato superiormente (ipotesi)

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $c + \varepsilon \in A$ → A non è un intervallo ma un sottoinsieme

affermazione → questa affermazione non è sempre vera

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \quad 1 = \inf \mathbb{N} \quad c = 1$

esercizio d'esame

→ l'affermazione è falsa perchè se ~~a = m~~ $A = \mathbb{N}$ allora $c = 1$ ma per $\varepsilon = 1/2$ si ha che $1 + 1/2 \notin \mathbb{N}$

$a \in \mathbb{Q} \quad b \in \mathbb{I} \quad | \quad a = \frac{m}{n}$ → numero con la virgola con cifre finite dopo la virgola → il numero dopo la virgola si ripete periodicamente

b = dopo la virgola ci sono infinite cifre decimali e non c'è una periodicità

$x_0 \in \mathbb{R}$ DEFINIZIONE: un intervallo aperto contenente il punto x_0 si dice intorno di x_0 → con ampiezza molto piccola

– INTORNO SIMMETRICO: si dice intorno sferico di centro x_0 e raggio $\delta > 0$ l'intorno $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) = I_\delta(x_0)$

$\overbrace{x_0 - \delta \quad x_0}^{\delta} \overbrace{\quad x_0 + \delta}^{\delta}$

INTORNO SFERICO bucato: $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

è un insieme ed è l'unione di due intervalli — non è un vero e proprio intorno

→ INTORNO SFERICO DESTRO
si dice intorno sferico dx di x di raggio δ l'intervallo $(x_0,\ x + \delta)$

→ INTORNO SINISTRO:
si dice intorno sinx di x di raggio δ l'intervallo $(x_0,\ x_0 - \delta)$

PUNTO D'INTERNO: $x_0 \in A$ si dice punto interno di A ($x_0 \in \mathring{A}$) se
$A \subset \mathbb{R}$ $\quad \exists\, \delta > 0 \ /\ I_\delta(x_0) \subset A$

Es: $A = [a, b)$ sia $x_0 \in A \mid a < x_0 < b$

tutti i punti si comportano sono interni all'insieme

$\mathring{A} = \{$ pti interni di $A \}$ $\quad (a, b) = \mathring{A}$

$a = x_0$?

Analisi Matematica

V lezione
14/10/10

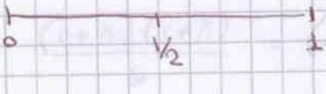
Es: $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{N}$ } non esiste alcun intorno sferico

$\not\subset$ tutti punti dell'intorno devono essere contenuti nell'insieme

DEFINIZIONE: $x_0 \in A$ si dice punto isolato di A se $x_0 \notin DA$

$A = (0, 1] \cup \{2\}$

Es: $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \}$



non ci sono punti interni

$\mathring{A} = \emptyset$

$A \subset \mathbb{R}$ DEFINIZIONE: $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione di A se $\forall \delta > 0$ si ha

$$(I_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

$x_0 \in DA \rightarrow$ derivato di A (insieme dei punti di accumulazione di A)

Es: $A\ (a, b]$
$a < x_0 < b$

$b \in DA$, $a \in DA$ } $[a, b] \subset DA$

Es: sia $x_0 \in DA$ per ogni intorno esistono infiniti punti di intersezione tra l'intorno bucato e l'insieme

Es: $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N} \}$ | $\delta_2 |x_1 - x_0|$

$\rightarrow$ l'insieme deve essere continuo

$\mathring{A} = \emptyset$ $\nearrow$ punto di accumulazione

$DA = \{1\}$ $\forall \delta > 0$ sia che $\{I_\delta(1) \cap A\} \setminus \{1\} \neq 0$

$\forall \delta > 0\ \exists \bar{x} \in A \mid 1 - \delta < \bar{x} < 1 \rightarrow \forall \delta > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n - \delta < \frac{\bar{n}}{\bar{n}+2}$

$n - \delta < \frac{\bar{n}}{\bar{n}+2} \rightarrow \bar{n} > \bar{n} + 2 - \delta\bar{n} - 2\delta \rightarrow \bar{n} > \frac{2(1-\delta)}{\delta}$

$\rightarrow$ visto che $\mathbb{N}$ è illimitato

PRINCIPIO DI INDUZIONE

regola che mi serve per dimostrare che certe proprietà siano soddisfatte da un insieme induttivo
$\rightarrow$ tutti gli elementi vengono stabiliti in base all'insieme dei numeri razionali

$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ se $\rightarrow$ 1) $P(n)$ è vera per il valore minimo di $\tilde{\mathbb{N}}$

$\swarrow$ proprietà

$\tilde{\mathbb{N}}$ illim. sup.

2) Supposta vera la proprietà $P(\bar{n})$ per un particolare $\bar{n} \in \tilde{\mathbb{N}}$ allora è vera anche la proprietà per il valore successivo

allora la proprietà è vera $\forall n \in \tilde{\mathbb{N}}$ $\leftarrow$

Es. $1+2 \dots n = \frac{n(n+1)}{2} = P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

dimostrazione: 1) $n=1$ verifica diretta $1=1$

2) (si basa su un ipotesi induttiva)

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \,/\, 1+2 \dots + \bar{n} = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2}$

tesi:

$1+2+\dots \bar{n} + (\bar{n}+1) = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}{2}$

$1+2 \dots + \bar{n} + (\bar{n}+1) \overset{\text{ipotesi induttiva}}{=} \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2} + (\bar{n}+1) =$

$1+2 \dots + n$

$(\bar{n}+1)\left(\frac{\bar{n}}{2}+1\right) = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots n$

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{n}$

Esercizi d'esame

Es. (1) Dimostrare che $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

(2) $10^n - 1$ è divisibile per 9, $\forall n \in \mathbb{N}$

Vedere perchè il principio di induzione vale in generale

Dimostrazione: (del principio d'induzione)

$\exists \bar{n} \in \tilde{\mathbb{N}}$ per cui $P(\bar{n})$ è falsa

$P(n-1)$ è falsa

$P(n-2)$ falsa fino ad arrivare $P(\bar{n}_{min})$ è falsa

(1) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \Big| \ $ 1) $n=0 \to 1=1$ ✓

2) $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \,/\, \sum_{k=0}^{\bar{n}} 2^k = 2^{\bar{n}+1} - 1$

$\sum_{k=0}^{\bar{n}+1} 2^k = \sum_{k=0}^{\bar{n}} 2^k + 2^{\bar{n}+1}$ ← dimostra . Tesi $\sum_{k=0}^{\bar{n}+1} 2^k = 2^{\bar{n}+2} - 1$

$\Rightarrow 2^{\bar{n}+1} - 1 + 2^{\bar{n}+1} = 2 \cdot 2^{\bar{n}+1} - 1 = 2^{\bar{n}+2} - 1$

(2) $10^n - 1$ è sempre divisibile per 9, $\forall n \in \mathbb{N}$

1) $n=1 \quad 10-1=9 \quad 9/9=1$

2) $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \,/\, 10^{\bar{n}} - 1 = 9\bar{k}$ tesi: $10^{\bar{n}+1} - 1 = 9k$

$10^{\bar{n}} \cdot 10 - 1 = 10^{\bar{n}} \cdot 10 - 10 + 9 = 10(10^{\bar{n}} - 1) + 9 = 10 \cdot 9\bar{k} + 9$

$= 9\underbrace{(10\bar{k}+1)}_{k}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Analisi Matematica

VI lezione
18/10/10

Es: $3^{3n}-1$ è div. per 13, $\forall n \in \mathbb{N}$ (principio d'induzione)

1) $3^3-1 = 26$ per $x=1$ $26/13=2$

2) $3^{3n}-1=13K$, ma allora $3^{3n+1}-1 = 3^{3n}\cdot 3 - 1 = 3(3^{3n})-3+2$

$3(3^{3n}-1)+2 = 13K$ $(3^{3n}-1)\frac{2}{3} = \frac{13}{3}K \rightarrow \frac{11}{3}$

$(3^{3n}-1) = \frac{13K \mp 2}{3}$ $(3^{3n}-1) = 13k \Rightarrow 3(3^{3n}-1) = 13(k-\frac{2}{3})$

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} / 3^{3\bar{n}}-1 = 13K$ TESI: $3^{3(\bar{n}+1)}-1 = 13h$

$3^{3(\bar{n}+1)}-1 = 3^{3\bar{n}}\cdot 27 - 1 = 3^{3\bar{n}}\cdot 27 - 27 + 26 = 27(3^{3\bar{n}}-1)+26$
$= 27\cdot 13K + 13\cdot 2 = 13(27K+2)$

Funzioni reali di una variabile reale

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A \rightarrow B$, $x \rightarrow y$

Definizione: è una relazione tra A e B | ad ogni elemento del primo sottoinsieme A associa un unico elemento di B

$f: A \rightarrow B$
(variabile indip.) $x \longmapsto y = f(x)$ (variabile dipendente)

y è l'immagine dell'elemento x_1 mediante la funzione f
$y_1 = f(x_1)$ mentre x_1 è la controimmagine di y_1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = f(x) = 3x$

A = Dominio della funzione, contiene degli elementi che hanno tutti un'immagine

B = Codominio (se l'insieme d'arrivo è composto da elementi che hanno una sola immagine è detto codominio)

$D \xrightarrow{g} C^{\alpha} \subsetneqq B$
$x_1 \rightarrow y_1$
$x_2 \rightarrow y_3$
$x_3 \rightarrow$
Suriettiva

DEFINIZIONE: f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$
graficamente = ~~se~~ una retta perf. parallela all'asse delle x interseca più di una volta il grafico non è iniettiva

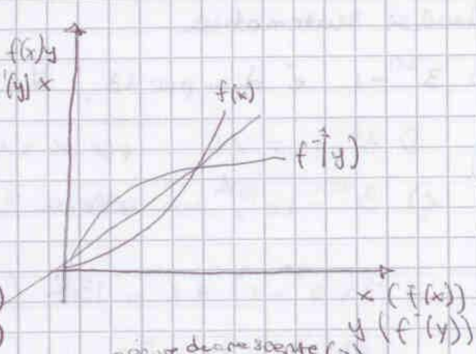
Es: $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$
$x \longmapsto y = f(x) = x^2$
non iniettiva perché $-1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 1$

per analizzare le proprietà qualitative di una funzione

$\text{Grafico}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in D, \ y = f(x)\}$

$f^{-1}: C \to D$
$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

$f: D \to C$
$x \longmapsto y = f(x)$



Definizione: f si dice strettamente crescente (nel dominio) se $\forall x_1, x_2 \in D$ con $(x_1 < x_2)$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$

Definizione: f si dice debolmente crescente (oppure decrescente ($\geq$)) e ad ogni coppie del dominio segue $f(x_1) \leq f(x_2)$

Definizione: f si dice strettamente decrescente se $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) > f(x_2)$

funzione monotone se rientra in una di queste 4 categorie

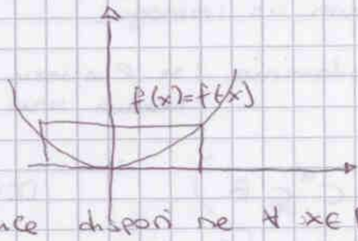
TEOREMA:
Es: (esame) una funzione strettamente monotona è iniettiva

Dimostrazione IPOTESI: f è strettamente crescente
$\forall x_1, x_2 \in D$, con $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$
TESI: $\forall x_1, x_2 \in D$, con $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

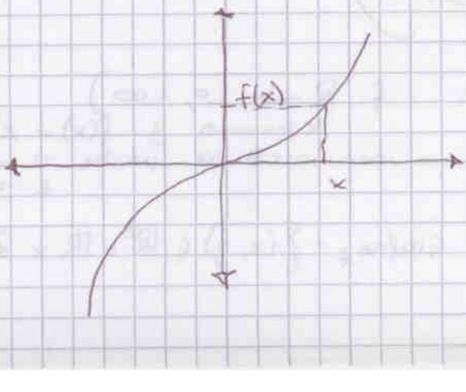
$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

~~Grafico di una funzione monotona:~~

DEFINIZIONE: f si dice pari se $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = f(x)$
D devese essere simmetrico rispetto all'origine



DEFINIZIONE: f si dice dispari se $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

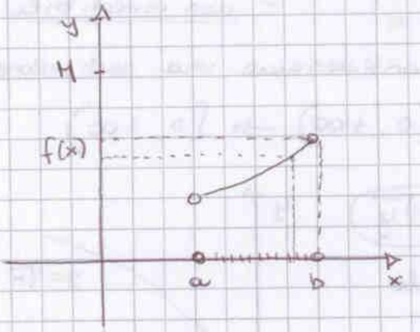
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi Matematica

VII lezione
19/10/10

$$f: D \to C$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

Definizione: $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di f:
se $M \geq f(x), \forall x \in D$



$$C = \{ f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in D \} \subseteq \mathbb{R}$$

Definizione: f si dice limitata superiormente se ammette un maggiorante

(sia f limitata superiormente)

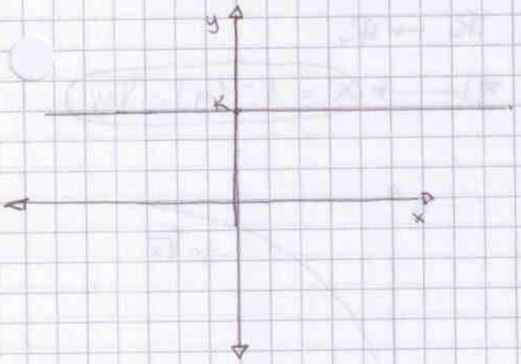
Definizione $M \in \mathbb{R}$ si dice massimo assoluto di f $(M = \max f)$
se: 1) $M \geq f(x), \forall x \in D$
2) $\exists x \in D \mid M = f(x)$ ovvero $M \in C$

Definizione: (sia f lim. superiormente) $\Lambda \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di f $(\Lambda = \sup f)$ se
1) $\Lambda \geq f(x), \forall x \in D$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in D \mid f(x) > \Lambda - \varepsilon$

STUDIO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONI COSTANTI

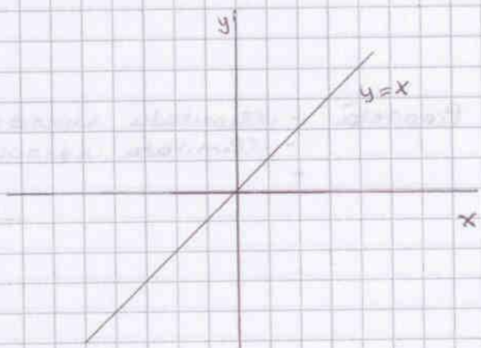
$$f: \mathbb{R} \to \{k\}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = k$$



Proprietà: - funzione debolmente crescente
- max coincide con il min
- funzione pari

MONOMI

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = x$$



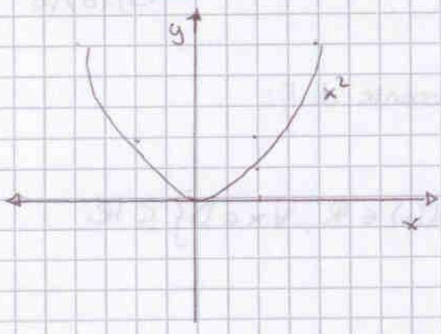
Proprietà:
- funzione strettamente crescente
- funzione dispari
- iniettiva, suriettiva, invertibile

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = y$$

FUNZIONE QUADRATICHE

$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$

$x \longmapsto y = x^2$



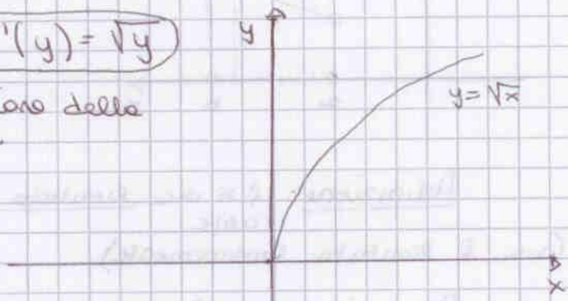
Proprietà: - funzione pari
- illimitato superiormente
- non invertibile

Se consideriamo una particolare restrizione

$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

~~$x \mapsto y$~~ $y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

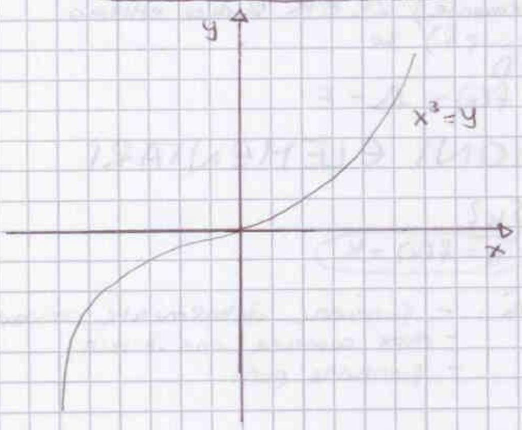
Espressione analitica = equazione della curva



FUNZIONI CUBICHE

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x) = x^3$

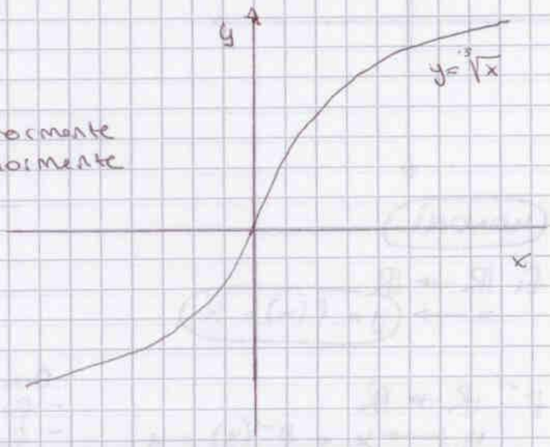


Proprietà: - illimitato superiormente
- illimitato inferiormente
- iniettiva, suriettiva, biettiva

~~Se so:~~

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$



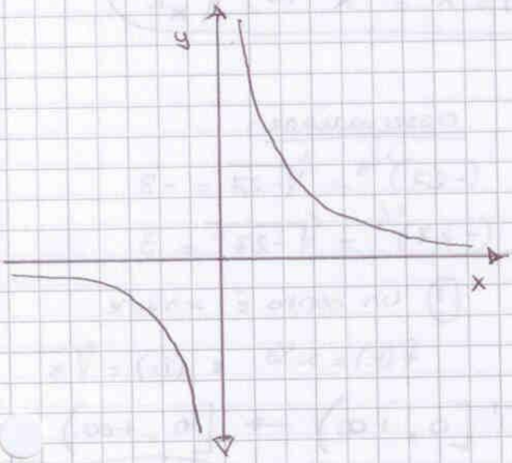
Proprietà: - illimitato superiormente
- illimitato inferiormente
-

Analisi Matematica

VII lezione
19/10/10

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \longmapsto y = f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

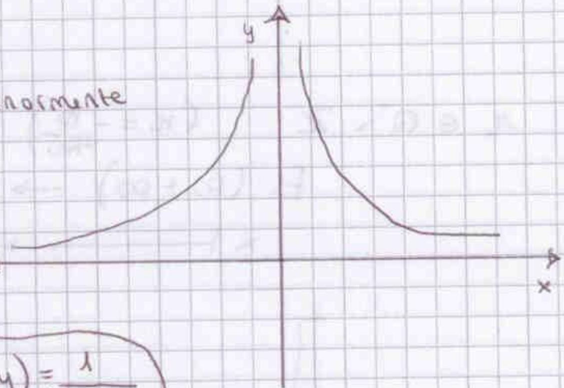


Proprietà: - illimitato superiormente
- Iniettiva
- suriettiva
} biettiva

(1) la funzione inversa è uguale

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$

$x \longmapsto y = f(x) = x^{-2}$

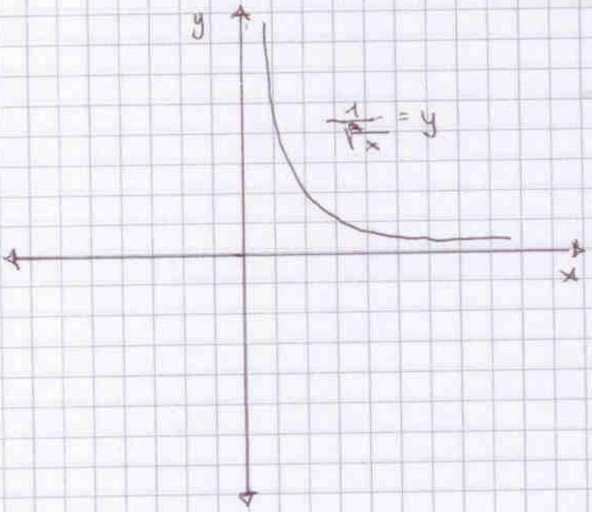


Proprietà: - non iniettiva
- illimitata superiormente
- non invertibile

Se consideriamo una restrizione

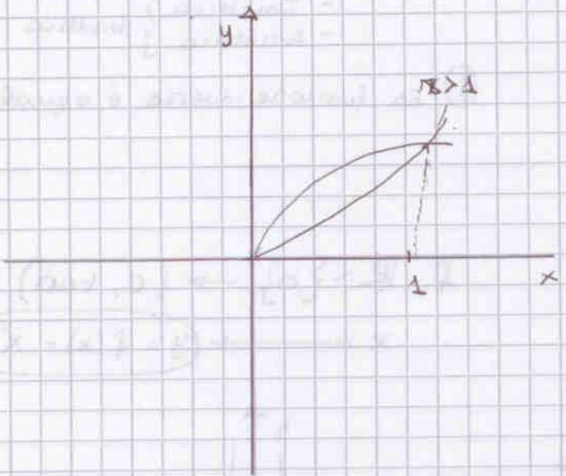
$f^{-1}: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt[2]{y}}$



$r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ $\quad \left(r = \frac{n}{m}\right) \quad n, m \in \mathbb{N}$

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$
$$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = x^r = x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}}$$



Osservazione:

$(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$

$(-27)^{2/6} = \sqrt[6]{-27^2} = 3$

! Un conto è scrivere

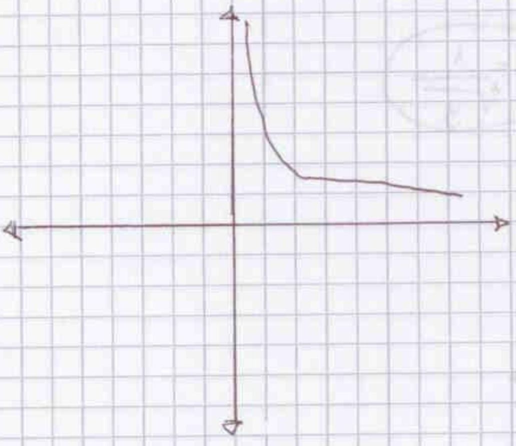
$f(x) = x^{1/3}$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$
$$y \longmapsto \boxed{x = f^{-1}(y) = y^{1/r}}$$

$r \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$ $\quad \left(r = -\frac{n}{m}\right) \quad n, m \in \mathbb{N}$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = x^r = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}}$$

Proprietà: - strettamente decrescente



Analisi Matematica

VIII lezione

21/10/10

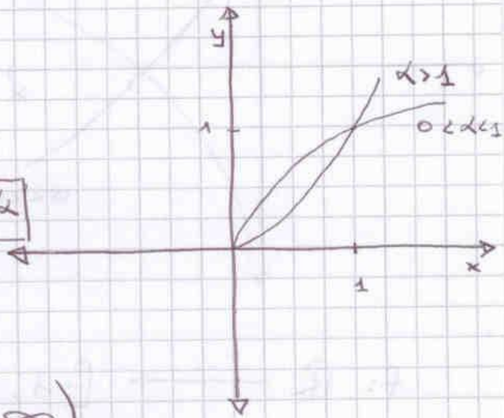
$\alpha \in \mathbb{I}^+$

$$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$
$$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = x^\alpha}$$

$x^{r_1} < x^\pi < x^{r_2}$

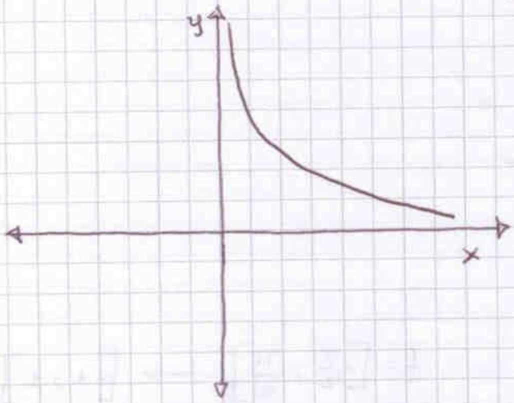
$r_1 < \pi < r_2$

$$f^{-1}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$
$$y \longmapsto \boxed{x = f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}}$$



$\alpha \in \mathbb{I}^-$

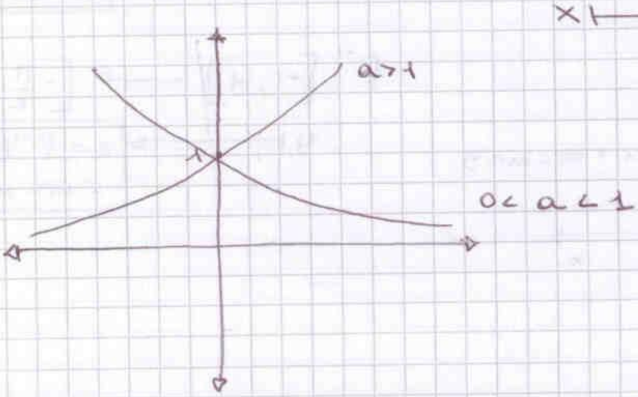
$$f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}}$$



$$f^{-1}: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$y \longmapsto \boxed{x = \frac{1}{y^{-\alpha}}}$$

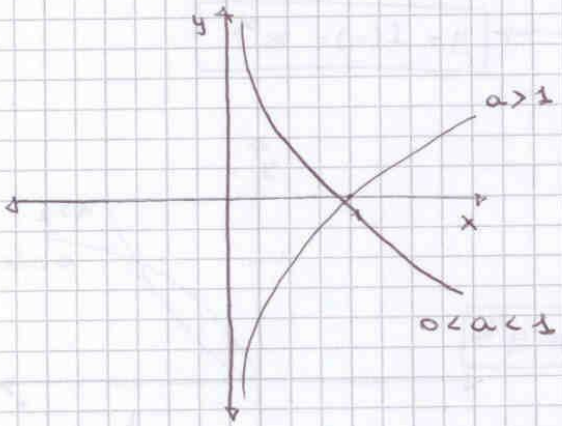
$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$
$$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = a^x}$$



$f^{-1}: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto \boxed{x = f^{-1}(y) = \log_a y}$

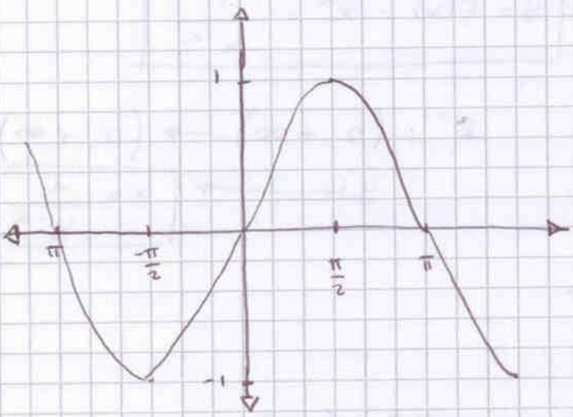


con $a > 1$ la funzione è strettamente crescente

con $0 < a < 1$ la funzione è strettamente decrescente

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto y = f(x) = \sin x$



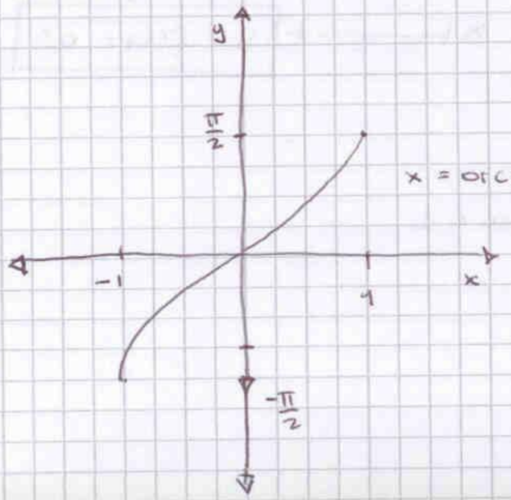
è una funzione dispari

$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = \sin x}$

$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y \longmapsto \boxed{x = f^{-1}(y) = = \arcsin y}$



Analisi Matematica

VIII lezione
21/10/10

Esercizio: la funzione senx è invertibile se ristretta all'intervallo $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$$f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \sin x$$

determinare la funzione esplicita della funzione inversa (esplicita)

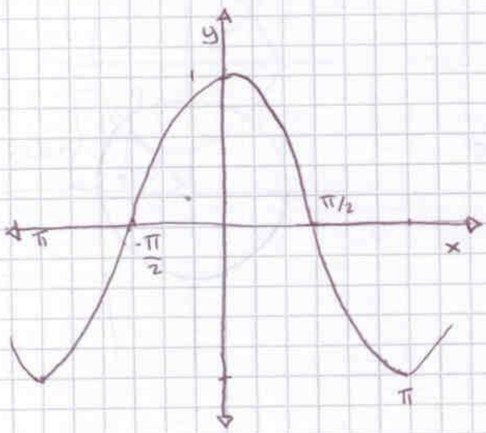
$$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$$

$x = \text{arc}\,\text{sen}\,(-y)$ e visto che è dispari

$\Rightarrow -\text{arc}\sin y \Rightarrow$ rotazione di 180° e poi traslazione

$$x = -\text{arc}\sin y + \pi$$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = \cos x}$$



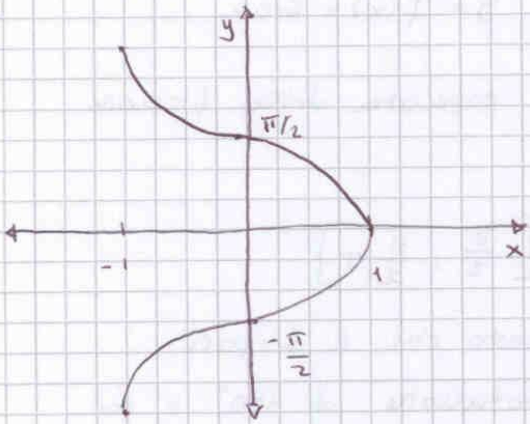
Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

$f: [2\pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longmapsto y = f(x) = \cos x$

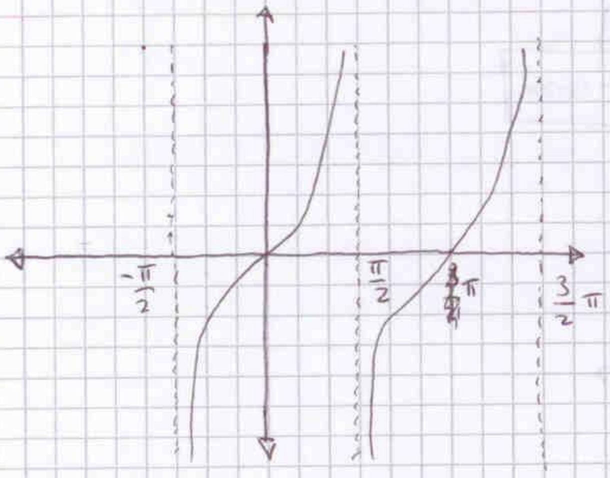
$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [2\pi, \pi]$

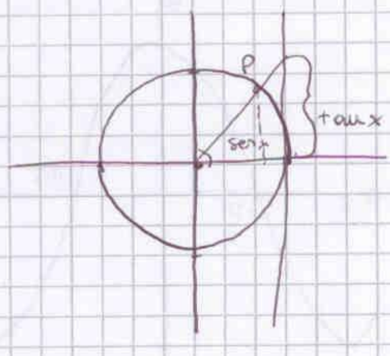
$y \longmapsto \boxed{x = f(y) = \arccos x}$



$f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \boxed{y = f(x) = tg\, x}$





Analisi Matematica — da rivedere — IX lezione 22/10/10

$$f(x) = \left(\frac{|2x-1|-|x|}{x-2}\right)^x \qquad f(x) = [h(x)]^{g(x)} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{|2x-1|-|x|}{x-2} > 0 \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad D_h = ?$$

$$h(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \qquad D_{Num} = \mathbb{R} \qquad D_{Den} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{|2x-1|-|x|}{x-2} > 0 \qquad |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$|2x-1| \qquad t = f(x) = 2x-1$$

$1-2x+x$; 0 ; $1/2$; $2x-1-x$; $1-2x-x$; x

$$y = y(t) = |t| = \begin{cases} t & se\ t \geq 0 \\ -t & se\ t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1 & se\ 2x-1 \geq 0 \\ -2x+1 & se\ 2x-1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 & se\ x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & se\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{|2x-1|-|x|}{x-2} \; ? \begin{cases} \frac{1-x}{x-2} & se\ x < 0 \quad \text{mai positiva } (-\infty, 0) \\ \frac{1-3x}{x-2} & se\ x \in [0, 1/2) \quad \text{positiva } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{x-1}{x-2} & se\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1-x}{x-2} > 0 \qquad 1 < x < 2 \quad = (1,2) \cap (-\infty, 0)$$

$$\frac{1-3x}{x-2} \quad se\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \qquad \frac{1-3x}{x-2} > 0 \qquad x < \frac{1}{3} \quad x > 2$$

$$x > \frac{1}{3} \quad x < 2 \qquad \left(\frac{1}{3}, 2\right) \cap \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$-$ o $+$ x $-$

$$\frac{x-1}{x-2} \quad se\ x \geq \frac{1}{2} \qquad \frac{x-1}{x-2} > 0$$

$$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \cap \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

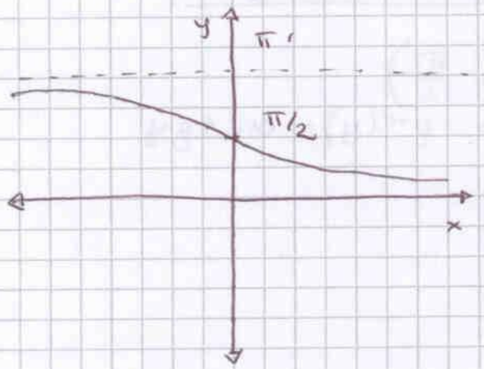
$\Rightarrow$ DOMINIO

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty) \Rightarrow D_f = (1/3, 1) \cup (2, +\infty)$$

restrizione per f^{-1}

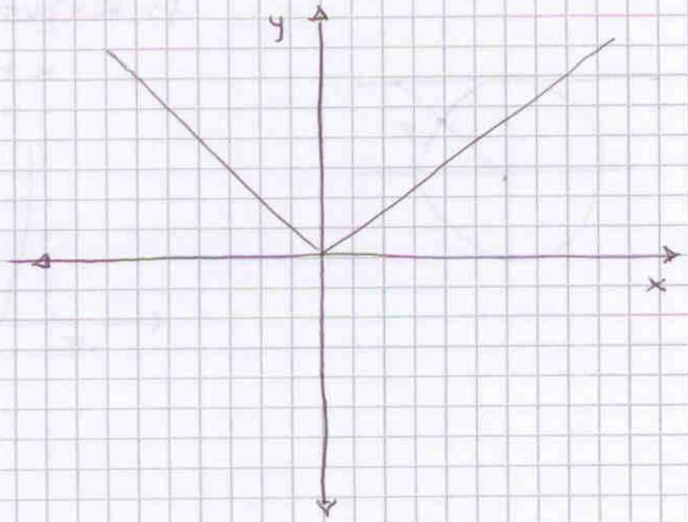
$$f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \cot g\, x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$
$$y \longmapsto x = f(y) = \operatorname{arc\,cotg} y$$



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$
$$x \longmapsto y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

funzione pari



Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Analisi Matematica

X lezione 25/10/10

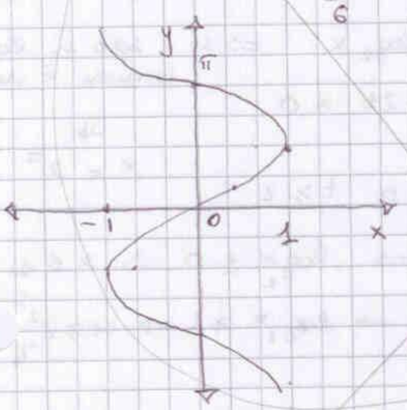
$$y = f(x) = -\pi + 6 \arcsin\left(\sqrt{3x^2+1} - 3x - 1\right)$$

$$\text{Dominio} = \left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

perchè $f(x) \geq 0$ per dominio?

$x \in D \;/\; f(x) > 0$ $\qquad \arcsin\left(\sqrt{3x^2+1} - 3x - 1\right) > \frac{\pi}{6}$

$\arcsin t > \frac{\pi}{6}$ $\qquad t > \frac{1}{2}$ $\qquad \arcsin t > \frac{\pi}{6}$ se $t > \frac{1}{2}$



$$\sqrt{3x^2+1} - 3x - 1 > \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3x^2+1} > 3x + \frac{3}{2}$$

a) $\begin{cases} ① \; 3x^2+1 \geq 0 \\ ② \; 3x + 3/2 \geq 0 \\ ③ \; 3x^2+1 > 9x^2 + 9/4 + 9x \end{cases}$ $\cup$ b) $\begin{cases} ① \; 3x^2+1 \geq 0 \\ ② \; 3x + \frac{3}{2} < 0 \end{cases}$

a) ① $\Rightarrow \mathbb{R}$
② $\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

③ $6x^2 + 9x + 9/4 < 0$ $\qquad 24x^2 + 36x + 5 < 0$ $\qquad x_1 = \frac{-18 + \sqrt{204}}{24}$, $\quad x_2 = \frac{-18 - \sqrt{204}}{24}$

$\Rightarrow (x_1, x_2)$ $\quad$ sbagliato

$x_1 = -0{,}15$

$x_2 = -1{,}34$

$$T_a = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-18 + \sqrt{204}}{24}\right)$$

b) ① $\Rightarrow \mathbb{R}$
② $\Rightarrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ $\qquad T_b = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

$$\text{Dominio} \cap \left(-\infty, \frac{-18 + \sqrt{204}}{24}\right)$$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-18 + \sqrt{204}}{24}\right)$

$f(x) < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{-18 + \sqrt{204}}{24}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

$f(x) = 0$ se $x = \frac{-18 + \sqrt{204}}{24}$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$P_3(x) = x^3 - 3x + 1$$

$f: D_f \longrightarrow C_f \qquad F(x) = f(x) \cdot g(x)$

$g: D_f \longrightarrow C_g \qquad F(x) = (x+1) \cdot \cos x$

$$D_F = D_f \cap D_g$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D_F = \{D_F \cap D_g\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$$

$$F(x) = [f(x)]^{g(x)} \iff f(x) > 0$$

$$D_F = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq 0\} \qquad f(x) = x^y \quad (x > 0)$$

<u>Funzione composta</u>:

$f: D_f \longrightarrow C_f \quad \big| \quad C_f \cap D_g = \emptyset$

$g: D_g \longrightarrow C_g \quad \big| \quad D_F = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in C_f \cap D_g\}$

$$D_F = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in C_f \cap D_g\} \subseteq D_f$$

$$D_F \xrightarrow{f} C_g \cap D_g \xrightarrow{g} C_F \subseteq C_g$$

$$x \longmapsto y = f(x) \longmapsto z = g(y) = g[f(x)]$$

$F: D_F \longrightarrow C_F$

$x \longmapsto z = f(x) = g[f(x)] \qquad F = g \circ f$

<u>Es.</u>: $f(x) = x^2 - 2$

$z = g(t) = \sqrt{t} \qquad g \circ f \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \qquad D_f = \mathbb{R}_x$

$D_f = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in C_f \cap D_g\} \neq \emptyset \qquad D_g = [0, +\infty)$

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 \geq 0\} = (+\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Analisi Matematica

XI lezione
26/10/10

LIMITI

Limite (di f in un punto)

$f: D \to C$

$x \longmapsto y = f(x)$

$x_0 \in \mathcal{D}D$ appartiene al derivato del dominio ~~ovvero qualunque~~
$x_0 \notin D$ ovvero in qualunque intorno ~~~~ bucato ci sono infiniti punti del dominio

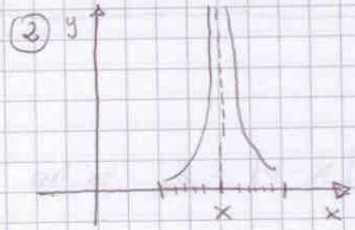
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} ① \ \ell & \text{f converge a } \ell \in \mathbb{R} \\ ② \ \pm\infty & \text{f diverge a } \pm\infty \\ ③ \ f \text{ è irregolare} \end{cases}$$

se una funzione appartiene è divergente o convergente f è regolare per $x \to x_0$

①

le immagini stanno convergendo ad ℓ quando x tende al punto di accumulazione

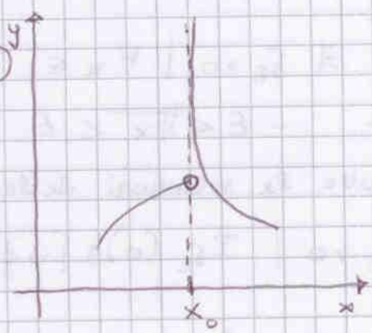
②



③

irregolarità più forte

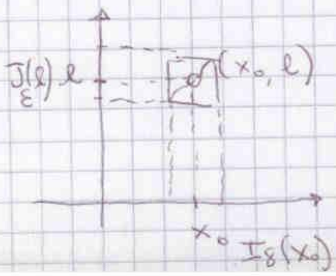
③



irregolarità più debole

$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$



$\forall$ intorno di ℓ $J_\varepsilon(\ell)$

$\exists$ intorno bucato di x_0 $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ |

$\forall x \in (I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ si ha ~~f(x)~~

$f(x) \in J_\varepsilon(\ell)$

Determinare dominio

$$f(x) = \log_2\left[\frac{\pi}{3} - \arccos(3^x - 2)\right]$$

$\log t \to t > 0$

$$\begin{cases} \pi/3 - \arccos(3^x - 2) > 0 \\ -1 \leq 3^x - 2 \leq 1 \quad [0, 1] \end{cases}$$

$\arccos \alpha \quad -1 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha = 3^x - 2 = g(x)$

$$\begin{cases} 3^x - 2 \geq -1 \\ 3^x - 2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x \geq 1 \\ 3^x \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

se la base è minore di 1
ovvero se fosse stata $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{2}$

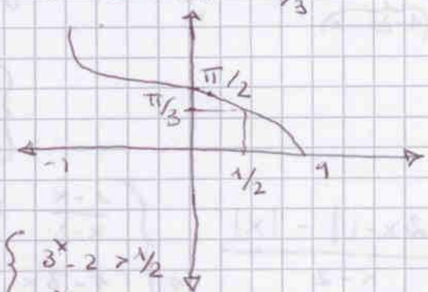
$\frac{1}{3}^x \geq 1$

$\arccos(3^x - 2) < \frac{\pi}{3}$

$\arccos t < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left(\log_3 5/3, 1\right] =$

$\arccos t < \pi/3$

$\left(\log_3 5/2, 1\right] = D_f$



Se faccio il coseno di $\pi/3 \Rightarrow \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 3^x - 2 > 1/2 \\ 3^x - 2 > 1/2 \end{cases} \quad x > \log_3 5/2$$

Studiare il dominio e il segno

$$f(x) = -\pi + 6 \arcsin\left(\sqrt{3x^2+1} - 3x - 1\right)$$

$\arcsin t \quad \begin{cases} -1 \leq \sqrt{3x^2+1} - 3x - 1 \leq 1 \\ 3x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{cases} ① \ \sqrt{3x^2+1} \leq 3x + 2 \\ ② \ \sqrt{3x^2+1} \geq 3x \quad D_f\left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \end{cases}$$

$\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$D_f = \left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

① $\begin{cases} 3x^2 + 1 \geq 0 \to \mathbb{R} \\ 3x + 2 \geq 0 \quad \text{perché cado nell'assurdo che } \sqrt{3+1} \text{ è negativo} \quad \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right) \\ 3x^2 + 1 \leq 9x^2 + 12x + 4 \end{cases}$

$6x^2 + 12x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 1 \geq 0 \quad \left(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

$-2/3 \quad 0$

$\underbrace{\text{due sistemi}}_{} \quad -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

① $\left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

Dominio $\left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

② $\begin{cases} 3x^2 + 1 \geq 0 \\ 3x \geq 0 \\ 3x^2 + 1 \geq 9x^2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x^2 + 1 \geq 0 \quad \mathbb{R} \\ 3x < 0 \quad (-\infty, 0) \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} \mathbb{R} \\ [0, +\infty) \\ \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \end{matrix}\right\} \left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

Analisi Matematica

XII lezione
28/10/10

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Verificare $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}$ per cui $-\delta_\varepsilon < x < \delta_\varepsilon$ e $x \neq 0$ si ha

quando considero il limite non voglio vedere cosa succede nel punto x_0 ma voglio osservare ciò che avviene nell' ~~punto~~ intorno bucato x_0.

$$1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} < 1 + \varepsilon \to x < (1+\varepsilon)^3 \\ \sqrt[3]{x} > 1 - \varepsilon \to x > (1-\varepsilon)^3 \end{cases}$$

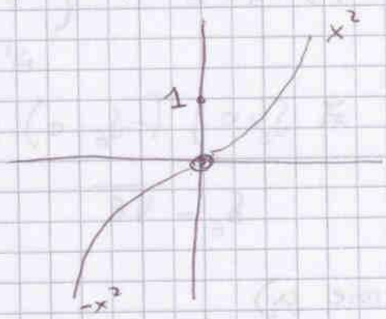
$$S = \left((1-\varepsilon)^3, (1+\varepsilon)^3\right)$$

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \Rightarrow$$
$$\subseteq \left((1-\varepsilon)^3, (1+\varepsilon)^3\right)$$

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subseteq \left((1-\varepsilon)^3, (1+\varepsilon)^3\right) =$$
$$(1 - 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3, \ 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$$

Esempio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$

per cui $-\delta_\varepsilon < x < \delta_\varepsilon$

e $x \neq 0$ si ha $\begin{cases} f(x) < \varepsilon \\ f(x) > -\varepsilon \end{cases}$

1 per il caso positivo

1) $\begin{cases} x^2 < \varepsilon \to 0 < x < \sqrt{\varepsilon} \\ x^2 > -\varepsilon \to \forall x > 0 \end{cases}$ $\quad S = (0, \sqrt{\varepsilon})$

2 caso $x < 0$

$\begin{cases} -x^2 < \varepsilon \to \forall x < 0 \\ -x^2 > -\varepsilon \to -\sqrt{\varepsilon} < x < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow S_2 = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$

$$S_1 \cup S_2 = (-\sqrt{\varepsilon}, 0) \cup (0, \sqrt{\varepsilon})$$

$\overset{?}{\exists} \delta_\varepsilon > 0 \mid (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subseteq S$? si $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$

Esercizio: trovare il dominio

① $f(x) = \sqrt{\ln(2\sin x)}$

② $g(x) = \sqrt{\ln(x^2-3)} + \ln x$

③ $h(x) = \dfrac{1}{\ln^2 x + 3\ln x + 2}$

④ $k(x) = \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x}$

$k(x) = \sqrt{(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x}$

④ $\begin{cases} (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$t = \log_2 x$ => se e solo se la funzione è iniettiva

$t^2 - 2t \geq 0$

$\Downarrow$

$x = 2^t$

$t \leq 0 \quad t \geq 2$

Dominio $(0, 1] \cup [4, +\infty)$

$t \leq 0 \rightarrow \log_2 x \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

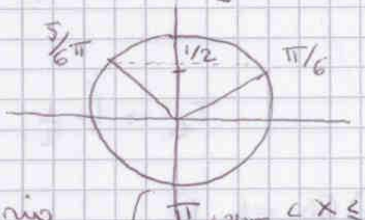
$t \leq 2 \rightarrow \log_2 x \geq 2 \Rightarrow x \geq \underbrace{2^2}_{=4}$

$\boxed{\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x}$

Attenzione: $\log_a (x^2) = 2\log_a |x|$ (ci numeri negativi al quadrato)

① $\begin{cases} \ln(2\sin x) \geq 0 \\ 2\sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\cancel{\sin x > 0}$

$2\sin x \geq 1 \quad \sin x \geq \frac{1}{2}$



Dominio $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$

② $g(x)$ $\begin{cases} ① \ x > 0 \\ ② \ x^2 - 3 > 0 \text{ (questo sta nello 3)} \\ ③ \ \ln(x^2-3) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3 \geq 1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 \geq 4 \end{cases}$ $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Dominio $[2, +\infty)$

③ $\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x + 3\ln x + 2 \neq 0 \end{cases}$ $t = \ln x$

Dominio $\left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$

$t^2 + 3t + 2 \neq 0$ $\nearrow -1$ $\searrow -2$ verificare

$t = -1 \rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

$t = -2 \rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$

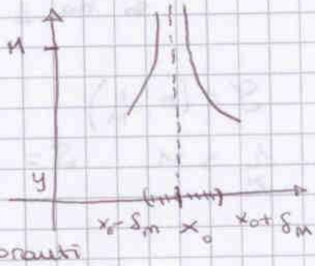
Dominio $\left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Analisi Matematica

XIII lezione
28/10/10

Funzioni Divergenti:

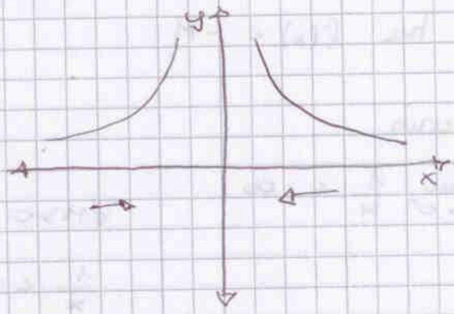
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



M è un numero grande a piacere
→ non esistono maggioranti nell'intorno

$$\boxed{\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in D_f \text{ per cui } |x - x_0| < \delta_M \text{ si ha } f(x) > M \text{ (è uguale } f(x) \in (M, +\infty))}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ | \ \forall x \neq 0$ e $x \in (-\delta_M, \delta_M)$ si ha

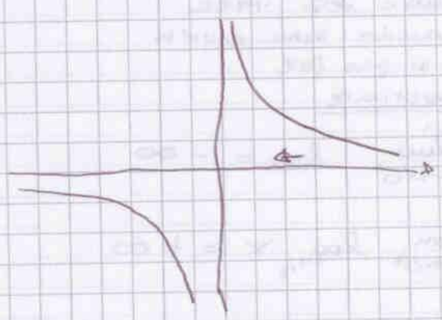
$$\frac{1}{x^2} > M$$

$$\frac{1}{x^2} > M \rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\exists \delta_M > 0 \ | \ (-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\} \subseteq S = \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \cancel{\exists}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ | \ \forall x \in (0, \delta_M)$ si ha $\frac{1}{x} > M$

$$\frac{1}{x} > M \Rightarrow x < \frac{1}{M} \qquad S = \left(0, \frac{1}{M}\right)$$

$$\exists \delta_M > 0 \ | \ (0, \delta_M) \subseteq S$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon \; / \; \forall x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$-\delta_\varepsilon < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow \cancel{x_0} - \delta_\varepsilon < \cancel{x} < \cancel{x_0} + \delta_\varepsilon$

$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in D \text{ per cui } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

Dimostrazione $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ per cui $|x - 0| < \delta_\varepsilon$ si ha $|\sqrt[3]{x} - 0| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\}$

si ha $-\varepsilon < \sqrt[3]{x} < \varepsilon$

1) det tutte le soluzioni della disequazione $\begin{cases} \sqrt[3]{x} < \varepsilon \\ \sqrt[3]{x} > -\varepsilon \end{cases}$

2) $\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid I_{\delta_\varepsilon}(0) \setminus \{0\} \subset S$

$\begin{cases} x < \varepsilon^3 \\ x > (-\varepsilon)^3 \end{cases}$

$S = (-\varepsilon^\varepsilon, \varepsilon^\varepsilon)$

2) $\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subsetneq S \qquad S = (-\varepsilon^3, \varepsilon^3)$

$\delta_\varepsilon = \varepsilon^3$

Analisi Matematica

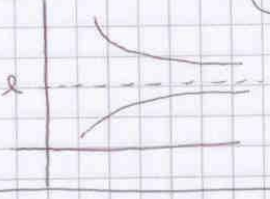
XIV lezione
30/10/10

$f: D \to C$
$x \longmapsto y = f(x)$

(D) illimitato superiormente

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} ① \ \ell \in \mathbb{R} & f \text{ converg. a } \ell \\ ② \ \pm\infty & f \text{ diverge a } \pm\infty \\ ③ \ \nexists & f \text{ è irregolare per } x \to \infty \end{cases}$$

① $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in D_f \text{ per cui } x > \delta_\varepsilon \text{ si ha } |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

Esercizio

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0^+ \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0 \ | \ \forall x > \delta_\varepsilon$ si ha

$x > 0 \qquad 0 < f(x) < 0 + \varepsilon$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x < \varepsilon \to x > \log_{1/2} \varepsilon \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \quad \forall x > 0 \end{cases}$$

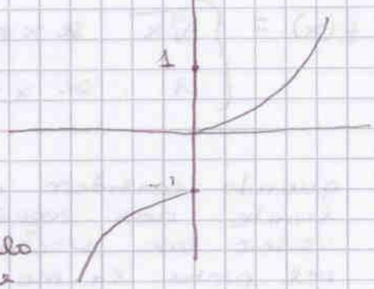
$$S = (\log_{1/2} \varepsilon, +\infty)$$

$\exists \ \delta_\varepsilon > 0 \ | \ (\delta_\varepsilon, +\infty) \subseteq S$

$\delta_\varepsilon = \log_{1/2} \varepsilon$

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x>0 \\ -x^2-1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$



a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \nexists$ Se il limite destro è diverso da quello sinistro la funzione è irregolare

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

Dimostrazione b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ per cui $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ si ha $f(x)$

$-1-\varepsilon < f(x) < -1+\varepsilon$

Risoluzione del sistema

$$\begin{cases} -x^2-1 < -1+\varepsilon \\ -x^2-1 > -1-\varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2 < \varepsilon \to x<0 \\ -x^2 > -\varepsilon \to x^2 < \varepsilon \end{cases} \qquad \cancel{S (-\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon)}$$

$S' = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$

$\exists \delta_\varepsilon > 0 \mid (-\delta_\varepsilon, 0) \subseteq S$

$\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$

Dimostrare a)

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini

Analisi Matematica

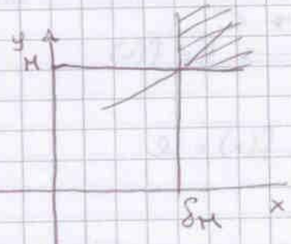
XVI lezione
3/11/10

LIMITI

funzioni divergenti:

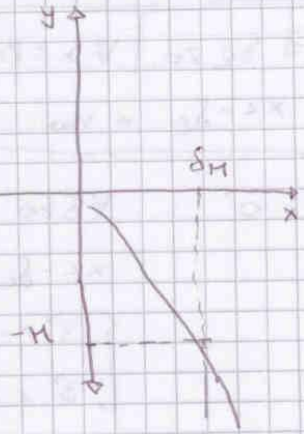
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

$\forall M > 0 \; \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in D$
per cui $x > \delta_M$ si ha $f(x) > M$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

$\forall M > 0 \; \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in D$
per cui $x > \delta_M$ si ha $f(x)$
$f(x) < -M$



Esempio

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$$

$\forall M > 0 \; \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in D$ per cui $x > \delta_M$
si ha $\ln x > M$
$S(e^M, +\infty)$

$$\exists \delta_M > 0 \,/\, (\delta_M, +\infty) \subseteq S = (e^M, +\infty)$$

Successioni

$\lim_{n \to \infty} a_n \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, \forall n \in \mathbb{N}$ per cui $n > \delta_\varepsilon$
si ha che $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+2} < 1 + \varepsilon$

$$\left.\begin{cases} \frac{n}{n+2} < 1 + \varepsilon \to \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{n}{n+2} > 1 - \varepsilon \quad n > \text{prima } \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \end{cases}\right\} \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid (\delta_\varepsilon, +\infty) \cap \mathbb{N} \subseteq \left(\frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \cap \mathbb{N}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ $\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in (-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\}$ si ha 1

1 caso $x > 0$ $S = (0, \frac{1}{M})$

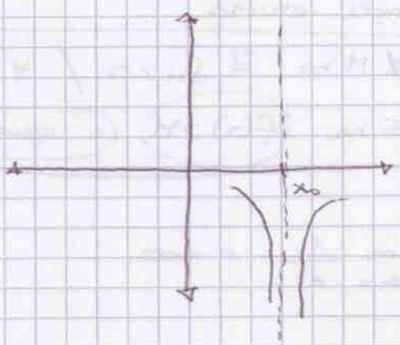
2 caso $x < 0$ $\frac{1}{x} > M$ $S = \emptyset$ perchè un numero negativo non può essere maggiore di un numero positivo

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in D_f$

per cui $0 < |x - x_0| < \delta_M$

si ha $f(x) < -M$



Esercizio

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in (-\delta_M, 0)$ si ha

$\frac{1}{x} < -M$

controllare

dimostrazione: $x < 0$ $\frac{1}{x} < -M \Rightarrow x > -\frac{1}{M}$ $S = (-\frac{1}{M}, 0)$

se i segni del primo e del secondo membro sono concordi si fa alla $^{-1}$ e si cambia verso invece quando sono diversi non si può fare

$\exists \delta_M > 0 \mid (-\delta_M, 0) \subseteq S = (-\frac{1}{M}, 0)$

Dimostrare

Es: $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

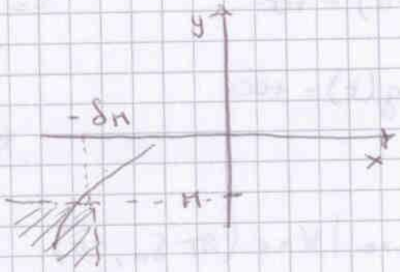
$\lim_{x \to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$

Analisi Matematica

XVI lezione
3/11/10

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in D$ per cui $x < -\delta_M$ si ha $f(x) < -M$



Esercizi d'esame

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta'_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$
$\delta''_\varepsilon > 0$
per cui $x > \delta'_\varepsilon$ si ha $\frac{1}{2} - \varepsilon < f(x) < \frac{1}{2} + \varepsilon$
$x < -\delta''_\varepsilon$ " "

den. positivo

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{2x^2+1} < \frac{1}{2} + \varepsilon & (1) \\ \frac{x^2-1}{2x^2+1} > \frac{1}{2} - \varepsilon & (2) \end{cases} \to \begin{cases} 2\cancel{x^2} - 2 < 2\cancel{x^2} + 1 + 4\varepsilon x^2 + 2\varepsilon \\ 2x^2 - 2 > 2x^2 + 1 - 4\varepsilon x^2 - 2\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\varepsilon x^2 > -3 - 2\varepsilon & (1) \to \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\varepsilon x^2 > 3 - 2\varepsilon & (2) \to x^2 > \frac{3 - 2\varepsilon}{4\varepsilon} \end{cases}$$

$$S \left(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}, +\infty\right)$$

$$\exists \delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon > 0 \mid (-\infty, -\delta''_\varepsilon) \cup (\delta'_\varepsilon, +\infty) \subseteq S$$

$$\delta'_\varepsilon = \delta''_\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}$$

Verificare mediante la def di limite se è vera o falsa

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{4}{3}\right)^{-1/x} = +\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \neq 0 \text{ per cui}$$
$$-\delta_M < x < \delta_M \text{ si ha } \left(\frac{4}{3}\right)^{-1/x} > M$$

sempre positivo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/x} > M \to -\frac{1}{x} > \log_{4/3} M$$

se la base è minore di uno la relazione cambia

1 caso $x > 0$: $S_1 = \emptyset$

2 caso $x < 0$: $\frac{1}{x} < -\log_{4/3} M$

$x > -\frac{1}{\ln_{4/3} M} < 0 \quad S_2 \left(-\frac{1}{\log_{4/3} M}, 0\right)$

$S_1 \cup S_2 = S_2$

$\exists \delta_M > 0 \mid (-\delta_M, \delta_M) \setminus \{0\} \subseteq S_2$

Analisi Matematica — XVII lezione 4/11/10

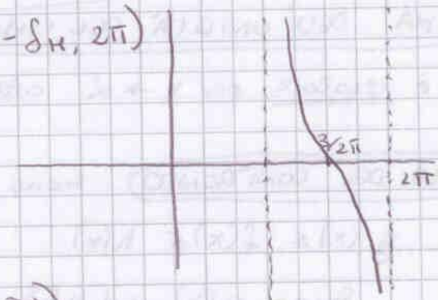
$\lim_{x \to \pi^-} \text{cotg}(x+\pi) = +\infty \Rightarrow \lim_{t \to 2\pi^-} \text{cotg}\, t = +\infty$

$t = x + \pi$ se $x \to \pi^- \Rightarrow t \to 2\pi^-$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \ / \ \forall x \in (2\pi - \delta_M, 2\pi)$

si ha $\text{cotg}\, t > M$

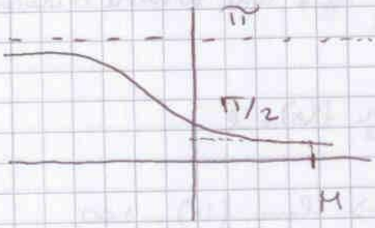
la funzione cotangente è sempre decrescente



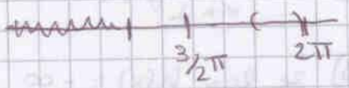
$t < \text{arccotg}\, M + \pi$

$S = (-\infty, \text{arccotg}\, M + \pi)$

$\nexists\, \delta_M > 0 \ | \ (2\pi - \delta_M, 2\pi) \subseteq S \ (-\infty, \text{arccotg}\, M + \pi)$

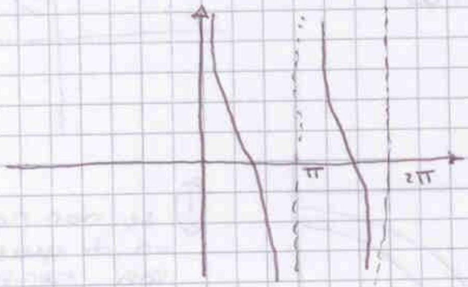


$\text{arccotg}\, M < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{arccotg}\, M + \pi < \frac{3}{2}\pi$



l'inversione delle funzioni trigonometriche non sono sempre uguali all'arcoseno ma bisogna considerare l'intervallo

visto che la cotg è una funzione periodica



$\lim_{t \to \pi^-} \text{cotg}\, t = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} e^{\cos x} = 0$ Verificare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ | \ \forall x \in (0, \delta_\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < e^{\cos x} < \varepsilon$

$\begin{cases} e^{\cos x} > -\varepsilon \to \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{\cos x} < \varepsilon \quad \cos x < \ln \varepsilon \end{cases}$

la base è maggiore di 1 quindi non si cambiano le relazioni di ordine

$S_2 = \emptyset$

per ε piccolo il logaritmo fa sì che il numero sia negativo

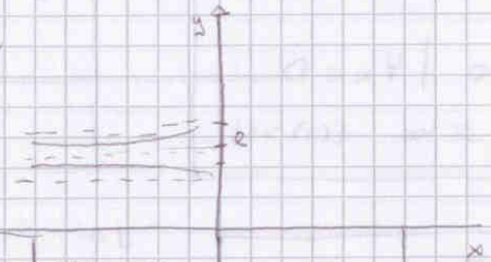
$S_1 \cap S_2$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x = \nexists$

Dominio eelimitato inferiormente

$f: D \to C$
$x \longmapsto y = f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$



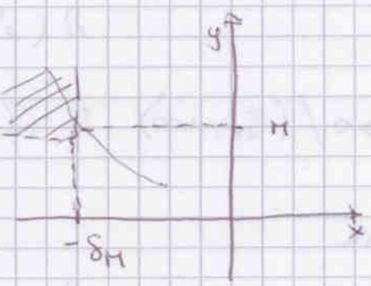
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in D \text{ per cui } x < -\delta_\varepsilon \text{ si ha } |f(x) - l| < \varepsilon}$$

$\lim_{x \to -\infty} 3^x = 0^+$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in D$ per cui $x < -\delta_\varepsilon$ si ha $|3^x - 0| < \varepsilon$

$$\begin{cases} 3^x > -\varepsilon & \forall x \in \mathbb{R} \\ 3^x < \varepsilon \to x < \underbrace{\log_3 \varepsilon} \end{cases}$$ questo numero è negativo

$$\delta_\varepsilon = |\log_3 \varepsilon| = -\log_3 \varepsilon$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in D$

per cui $x < -\delta_\varepsilon$ si ha $f(x) > M$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$ $\quad \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x > M \right.$ $\quad x < \underbrace{\log_{1/2} M}$ Molto grande — numero negativo

$$\exists \delta_M > 0 \mid (-\infty, -\delta_M) \subseteq (-\infty, \log_{1/2} M)$$
$$\delta_M = |\log_{1/2} M|$$

Analisi Matematica

XVII lezione 4/11/10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{?}{=} 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R} \quad -1\le \sin x \le 1$$

Cerchiamo delle maggiorazioni e minorazioni vicine ad f(x)

$$\forall x>0 \quad \underset{\substack{\searrow \\ -\infty}}{-\frac{1}{x}} \le \frac{\sin x}{x} \le \underset{\substack{\searrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x}} \quad \text{per } x\to 0^+$$

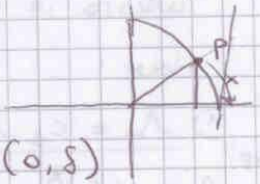
$$\forall x<0 \quad \underset{\substack{\searrow \\ -\infty}}{\frac{1}{x}} \le \frac{\sin x}{x} \le \underset{\substack{\searrow \\ +\infty}}{-\frac{1}{x}}$$

OSSERVAZIONE

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari $\qquad f(-x) = \frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin}{x}$

quindi visto che la funzione è simmetrica possiamo studiare anche solo per l'intorno destro

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \overset{?}{=} 1 \qquad x\in(0,\delta)$$



$$\sin x < x < tg\, x \qquad \forall x\in(0,\delta)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \forall x\in(0,\delta)$$

$$\underset{\substack{\searrow \\ 1}}{\cos x} < \frac{\sin}{x} < \underset{\substack{\searrow \\ 1}}{1} \qquad \text{per il teorema del confronto}$$

TEOREMA: sia f regolare per $x\to a$ e sia $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda$

allora $\lim_{x\to a} g[f(x)] = \lim_{t\to\lambda} g(t)$

prima bisogna chiedersi come risolvere quello più interno

OSSERVAZIONE $\quad F(x) = g[f(x)] \qquad \lim_{x\to x_0} F(x) =$

$x_0 \in DD_F \Leftarrow x_0 \in DD_f$ questo dipende dal dominio

$$D_F = \{x\in D_f \,/\, f(x) \in C_f \cap D_g\} \subseteq D_f$$

Dimostrare che x_0 è un punto di accumulazione

$\forall \delta>0$ si ha $\{D_f \cap I_\delta(x_0)\} \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Hp $\forall \delta>0$ si ha $\underbrace{\{D_F \cap I_\delta(x_0)\}}_{\bar{x}} \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

visto che $\bar{x}$ è presente allora sarà presente anche in D_f

$\lim_{x \to \pi^-} \cot(x+\pi) = +\infty$

$t = x + \pi \qquad x = t - \pi$

$\pi^- + \pi$

$\Downarrow$

$t = 2\pi^-$

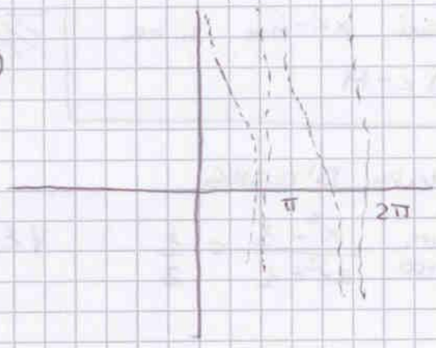
$\lim_{t \to 2\pi^-} \cot g(t) = +\infty$

$\cot g > M$

$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 \mid \forall x \in (2\pi - \delta_M, 2\pi)$

si ha $\cot g\, t > M$

$t < \operatorname{arccot} M + \pi$



Analisi Matematica

XVIII lezione
5/11/10

TEOREMA:

$$\lim_{x \to a} \left[c_1 f(x) + c_2 g(x) \right] = c_1 \lim_{x \to a} f(x) + c_2 \lim_{x \to a} g(x)$$

se non ci troviamo in una delle tre ipotesi di prima non si possiamo applicare

analisi delle condizioni sfavorevoli (la formula non può essere applicata)

(I) se $\Lambda_f = \Lambda_g = \pm\infty$ e $c_1 \cdot c_2 < 0$

(II) se $\Lambda_f = +\infty$, $\Lambda_g = -\infty$ e $c_1 c_2 > 0$

$\Rightarrow \infty - \infty$ forma indeterminata

TECNICHE PER STUDIARE LIMITI PER NELLA FORMA INDETERMINATA QUANDO NON SONO SODDISFATTE LE IPOTESI DEI VARI CRITERI

$$\lim_{x \to \infty} \left(\underset{\infty}{\sqrt{x+1}} - \underset{\infty}{\sqrt{x}} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1 + x}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\underset{+\infty}{\sqrt{x+1}} + \underset{+\infty}{\sqrt{x}}} = 0$$

$\to \infty$

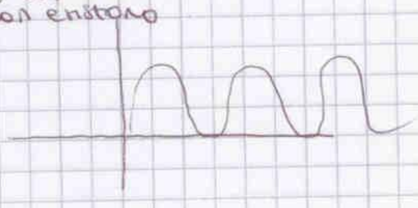
$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x =$$

(utilizzando il teorema del confronto)

$$x + \sin x \geq x - 1 \to +\infty$$

Esempio di una combinazione di lineare di due limiti che presi singolarmente non esistono

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{\nexists}{\sin^2 x} + \underset{\nexists}{\cos^2 x} = 1$$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Studiare al variare del parametro reale c il seguente limite

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) \cdot (c + \cos x) \right]$$

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \Lambda$ $\qquad \alpha = \begin{cases} x_0 \in D\,D_f \\ +\infty & D_f \text{ è illimitato superior} \\ -\infty & D_f \text{ è illimitato inferiorm.} \end{cases}$

se $\alpha = x_0$ allora $I_\delta(\alpha) \setminus \{\alpha\}$
se $\alpha = +\infty$ allora $I_\delta(\alpha) = (\delta, +\infty)$

$\Lambda = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{converge} \\ \pm\infty & \text{diverge} \end{cases}$

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

se f è regolare per $x \to \alpha$ allora Λ è unico

TEOREMA DEL CONFRONTO siano f, g, h tali che $\forall x \in I_\delta(\alpha) \setminus \{\alpha\}$

si ha $g(x) \le f(x) \le h(x)$

f, g, h sono definite nell'intorno di $\{\alpha\}$
h è una funzione maggiorante di f
$h(x)$ $f(x)$
g è una funzione minorante di f

siano $g(x)$ ed $h(x)$ regolare per $x \to \alpha$

esempio

allora

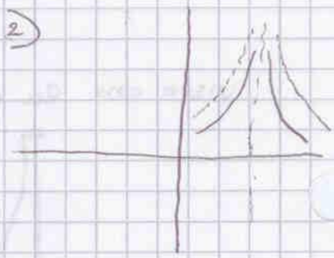
1) se $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$

2) se $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$

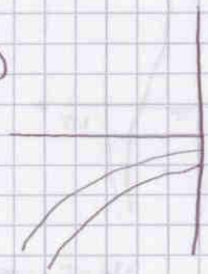
3) se $\lim_{x \to \alpha} h(x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$

2)



3)



(!) se non rientro in un di questi tre casi non si può concludere nulla

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{(x + \sin x)}_{f(x)} = +\infty \qquad -1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(x - 1)}_{\to +\infty} \le x + \sin x \le x + 1$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{\cos x}$$

$$\forall \delta > 0 \; \exists x', x'' \in (\delta, +\infty) \mid e^{\cos x'} = e \qquad e^{\cos x''} = \frac{1}{e}$$

$$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \frac{1}{e} \le e^{\cos x} \le e$$

analisi Matematica

XIX lezione 8/11/10

TEOREMA (prodotto)

Siano f e g regolari per $x \to \bar{x}$ con $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \Lambda_f$,

$\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = \Lambda_g$ $\quad \lim_{x \to \bar{x}} f(x)\, g(x) = \Lambda$

dove 1) $\Lambda = \Lambda_f \cdot \Lambda_g$ se $\Lambda_f, \Lambda_g \in \mathbb{R}$

2) $\Lambda = +\infty$ se $\Lambda_f = \pm\infty$ e $\Lambda_g \gtrless 0$

Es: $\lim_{x \to +\infty} (\log x) \left(\frac{x^2+1}{2x^2+x-1} \right)$

$+\infty \qquad \searrow \frac{1}{2}$

Es: $\lim_{x \to 0^+} (\log x)(-\cos x)$

$\swarrow -\infty \qquad \downarrow -1$

2) $\Lambda_f = \Lambda_g = \pm\infty$

3) $\Lambda = -\infty$ se $\begin{cases} \Lambda_f = \pm\infty & \Lambda_g \lessgtr 0 \\ \Lambda_f = \pm\infty & \Lambda_g = \mp\infty \end{cases}$

Casi sfavorevoli

(I) $\Lambda_f = \pm\infty, \Lambda_g = 0 \Rightarrow \infty \cdot 0$

(II) una delle due funzioni irregolari

Esempio $\lim_{x \to 0^+} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ (0)\cdot(-\infty)}}{x \log x} + \underset{\substack{\searrow \\ -\infty}}{\log x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \underset{-\infty}{(\log x)} \underset{+1}{(x+1)}$

$= -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x \sin x) = \nexists \qquad -1 \le \sin x \le 1 \quad -x \le x \sin x \le x$

$+\infty \not\nearrow \qquad \forall x > 0 \qquad -\infty \qquad +\infty$

$\forall \delta > 0 \; \exists x', x'' > \delta \mid f(x') = x', \; f(x'') = -x''$

né diverge né converge

$\lim_{x \to 0} e^{1/x} = \nexists$ visto che la funzione interna è regolare

l'ipotesi $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \Lambda$

$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ $t = \frac{\sin x}{x} \to t$

$\lim_{t \to 1} \ln(t) = 1$

XVIII lezione 5/1/10

TEOREMA. Siano f e g regolari per $x \to \alpha$

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \Lambda_f$, $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \Lambda_g$ → dimostrare che il punto di accumulazione x_0 è un punto di accumulazione fra entrambi dell'intersezione

Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$

allora il limite per $x \to \alpha$ $[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = \Lambda$

dove:

1) $\Lambda = c_1 \Lambda_f + c_2 \Lambda_g$ se $\Lambda_f, \Lambda_g \in \mathbb{R}$

Esempi

$\lim_{x \to +\infty} \underset{\searrow 0}{\left(\frac{1}{3}\right)^x} + \underset{\searrow 0}{\frac{3}{x}} = 0$

$\lim_{x \to 0} \underset{\downarrow 3}{3\cos x} - \underset{-2}{\frac{2\sin x}{x}} = 1$

2) $\Lambda = +\infty$ se $\Lambda_f = +\infty$ e $\Lambda_g \in \mathbb{R}$ e $c_1 > 0$

Esempi: $\lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow \infty}{3x} + \underset{\downarrow 0}{2\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \infty$

3) $\Lambda = +\infty$ ① $\begin{cases} \text{se } \Lambda_f = -\infty \text{ e } \Lambda_g \in \mathbb{R} \text{ e } c_1 < 0 \\ \text{② se } \Lambda_f = \Lambda_g = +\infty \text{ e } c_1 > 0 \quad c_2 > 0 \end{cases}$

Esempi: $\lim_{x \to -\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^x + (-x)$

③ (se $\Lambda_f = \Lambda_g = \pm\infty$ e $c_1 < 0$ $c_2 < 0$)

$\lim_{x \to 0^+} -3\underset{\searrow -\infty}{\ln x} - \underset{\downarrow -\infty}{\log_3 x}$

$\begin{cases} \text{④ se } \Lambda_f = +\infty, \Lambda_g = -\infty \text{ e } c_1 > 0 \quad c_2 < 0 \\ \text{⑤ se } \Lambda_f = \pm\infty, \Lambda_g = \mp\infty \quad c_1 < 0 \quad c_2 < 0 \end{cases}$

Analisi Matematica

XIX lezione
8/11/10

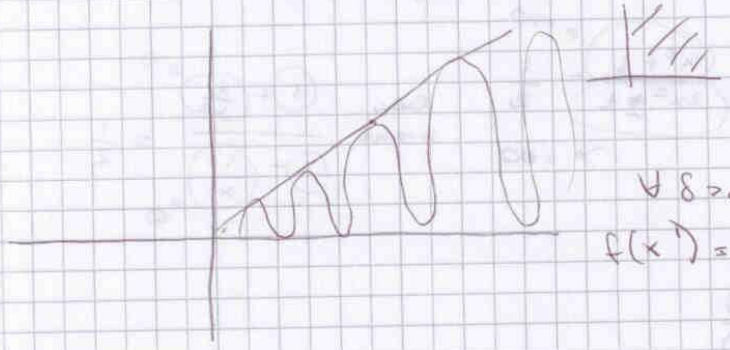
$$\lim_{x \to +\infty} x(1+\cos x) =$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$0 \leq 1+\cos x \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$0 \leq x(1+\cos x) \leq 2x$

Allora non esiste



la funzione non può divergere perchè non è crescente

$\forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' > \delta \mid$

$f(x') = 0 \quad f(x'') = 2x$

$\lim_{x \to +\infty} 0 \cdot x = 0$ prima di moltiplico e poi sostituisco

TEOREMA: Siano f e g regolari per $x \to \alpha$

con $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \Lambda_f$

$\lim_{x \to \alpha} g(x) = \Lambda_g$

allora $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \Lambda$

dove:

1) $\Lambda = \frac{\Lambda_f}{\Lambda_g}$ se $\Lambda_f \in \mathbb{R}$ e $\Lambda_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) $\Lambda = +\infty$ se $\begin{cases} \Lambda_f = \pm\infty \text{ e } \Lambda_g \gtrless 0 \\ \Lambda_f \gtrless 0 \text{ e } \Lambda_g = 0^{\pm} \\ \Lambda_f = \pm\infty \text{ e } \Lambda_g = 0^{\pm} \end{cases}$

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$ la funzione è infinitesima per $x \to \alpha$

3) $\Lambda = -\infty$ se $\begin{cases} \Lambda_f = \pm\infty \text{ e } \Lambda_g \lessgtr 0 \\ \Lambda_f \gtrless 0 \text{ e } \Lambda_g = 0^{\mp} \\ \Lambda_f = \pm\infty \text{ e } \Lambda_g = 0^{\mp} \end{cases}$

nota bene => $\frac{3}{\infty} = 0$ non lo scrivere mai al compito

4) $\Lambda = 0$ se $\begin{cases} \Lambda_f \in \mathbb{R} \text{ e } \Lambda_g = \pm\infty \end{cases}$

- uso dei limiti notevoli.
- utilizzare il grafico per dire che è irregolare

Analisi Matematica

XX lezione
9/11/10

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} =$$

il dominio di questa funzione è individuato dall'intersezione di g ed f, ed in più la base deve essere positiva

$$[f(x)]^{g(x)} = a^{\log_a [f(x)]^{g(x)}} = a^{g(x) \cdot \log_a [f(x)]}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \cdot \log[f(x)]} = e^{\lim_{x \to a} \{g(x) \cdot \ln[f(x)]\}}$$

$$\lim_{t \to \lambda} e^t \Rightarrow e^{\lim_{x \to a} \{g(x) \cdot \ln[f(x)]\}}$$

forma indeterminata

$g(x) \xrightarrow{x \to a} 0$
$f(x) \xrightarrow{\;''\;} +\infty$

forme indeterminate 1) $0 \cdot \infty$ 2) ∞^0 3) $\frac{\infty}{\infty}$ 4) $\frac{0}{0}$ 5) 0^0 6) 1^∞

Es $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \infty - \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0^+$$

($\sqrt{x+1} \to \infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$)

FUNZIONE CONTINUA in un punto

$f: D \to C$
$x \longmapsto y = f(x)$ $\qquad x_0 \in DD \cap D$

ha senso fare $\boxed{f(x_0) \quad \lim_{x \to x_0} f(x)}$ → ingredienti necessari

Definizione: f si dice continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione: f si dice continua in un sottoinsieme in $A \subset D$ se è continua in tutti i punti di A

TEOREMA: tutte le funzioni elementari sono funzioni continue nei rispettivi domini

Escludere la successione numerica tranne il caso in cui $n \to +\infty$

1

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\,\frac{\sin x}{x} = +\infty$$

$\frac{1}{x^2} \to +\infty$, $\sin x \to 0$; $\frac{1}{x} \to \nexists$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\,\frac{\sin x}{x} = -\infty$$

la funzione è irregolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\sin x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,\frac{\sin x}{x} = +\infty$$

$\frac{1}{x^3} \to \nexists$, $\sin x \to 0$; $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$

$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)$$

$x \to +\infty$, $\left(\frac{1}{2}+\cos x\right) \to \nexists$

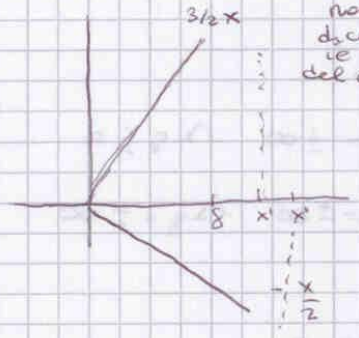
$$-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}+\cos x \le \frac{3}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

non mi dice nulla il teorema del confronto

$$-\frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}x\cos x \le \frac{3}{2}x \quad \forall x > 0$$

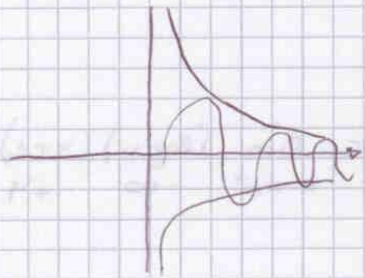
$-\infty \qquad +\infty$



$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, x', x'' > \delta \;\Big|\; f(x') = \frac{3}{2}x' \qquad f(x'') = -\frac{x''}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right) = 0$$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\cos x \to \nexists$



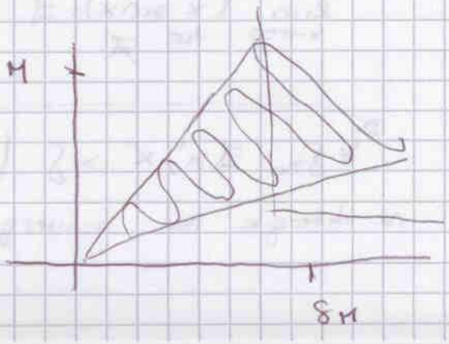
$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{3}{2}+\cos x \le \frac{5}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2}x \le \left(\frac{3}{2}+\cos x\right)x \le \frac{5}{2}x$$

$\frac{1}{2}x \to \infty \qquad \frac{5}{2}x \to \infty$

si ha la divergenza come ce lo ha detto il confronto



Analisi Matematica

XX errore
9/11/10

Definizione: discontinuità di 3° specie se:

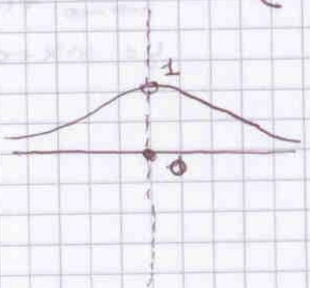
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\ell \neq f(x_0)$$

discontinuità eliminabile

Es: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$

se fosse stato 1 sarebbe stato continua



TEOREMA: Siano f e g continue in x_0 e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

allora $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ è continua in x_0

Es: $\sqrt[3]{x} - \sin x$

$x \geq 0$ $\forall \mathbb{R}$

$D_F = [0, +\infty)$

(!) se f e g sono continue nel loro dominio allora la continuità è la combinazione lineare ovvero l'intersezione tra i due domini

TEOREMA: Siano f e g continue in x_0

allora:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ è continua in } x_0$$

TEOREMA: Siano f e g continue in x_0

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ è continua in } x_0$$

Es: $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ $D_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

TEOREMA: Sia f continua in x_0 e sia g continua in $y_0 = f(x_0)$

allora $F(x) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$

Es $F(x) = \log(\sin x)$ $\sin x > 0$ $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

Situazione Sfavorevole

I) $\Delta_f = \Delta_g = \pm\infty \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ tutti e tre i casi

$\Delta_f = \Delta_g = 0 \rightarrow \frac{0}{0}$

II) una delle due funzioni è irregolare

Es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-1} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$P_n(x) = a_n x^n + \dots$

$Q_m(x) = b_n x^m + \dots$

$$\begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ \pm\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n \cdot b_m \gtrless 0 \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$\begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \\ +\infty & \text{se } n > m,\ a_m \cdot b_m > 0,\ n-m \text{ è pari};\ a_n\, b_m < 0,\ n-m \text{ è dispari} \\ -\infty & \text{se } n > m,\ n-m \text{ è dispari};\ n-m \text{ è pari} \end{cases}$$

Analisi Matematica

XXI lezione 10/11/10

Esercizi di Analisi

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{2x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x-1-2x}^{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{2x}}{x}} =$$ visto che la x è positiva

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x}{x^2}}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x} \to 0}{\underbrace{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}}_{0^+}} = +\infty = -\infty$$

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\sqrt{\frac{|x|}{x^2}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(!) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{|x|}{x^2}}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-\frac{1}{x}} = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{\ln x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$t = \ln x \qquad x = e^t \qquad x\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+2t}{t+1} = \frac{1+\frac{2}{t}}{\frac{1}{t}+\frac{1}{t}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

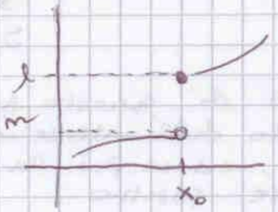
non omettere

LIMITI NOTEVOLI

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente e limitato superiorm

TEOREMA: sia $\{a_n\}$ crescente (monotona) e limitato superiormente allora $\{a_n\}$ converge

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ → o se è illimitato superiormente diverge a $+\infty$



$\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$ $\qquad f(x_0) = l$

se il punto non appartiene al dominio non ci poniamo proprio il problema di studiare la derivabilità continuità

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \rightarrow$ la funzione è continua solo a destra

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m$

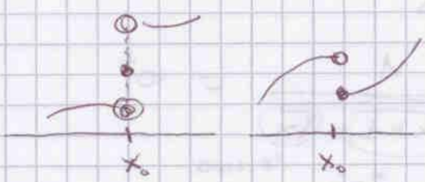
Classificazione delle discontinuità

Definizione: x_0 si dice punto di discontinuità di 1° prima specie se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ed f converge sia a destra che a sinistra

Riscritto: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$ e $l \neq m$

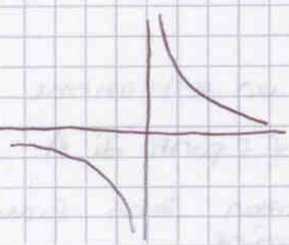
Esempio:



Definizione: discontinuità di 2° specie se:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$



$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$

Analisi Matematica

XXI lezione
10/11/10

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

$a^x - 1 = t \Rightarrow a^x = 1+t \Rightarrow x = \log_a(1+t)$

se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\log_a(1+t)}{t}\right)} = \frac{1}{\log_a e} = \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}} = \ln a$$

Es: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ Ipotesi

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)\left[c + \cos x\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$f(x) \to -\infty$, $\cos x \to \nexists$

teorema del confronto $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$c - 1 \leq c + \cos x \leq c + 1$$

$\forall x > 0 \quad f(x)\cdot(c+1) \leq f(x)\left[c + \cos x\right] \leq f(x)(c-1)$

$f(x)(c+1) \to -\infty$ per $c+1>0$; $+\infty$ per $c+1<0$

se $c < -1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)\left[c+\cos x\right] = +\infty$

prima di far tendere la funzione a $+\infty$ sostituisco il valore

se $c > 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)\left[c+\cos x\right] = +\infty$

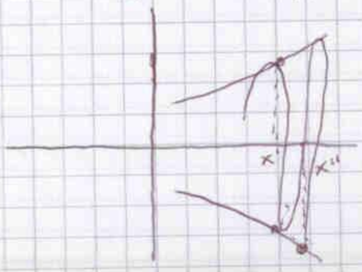
se $-1 < c < 1 \Rightarrow$ non è utile

$\forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' > \delta \mid \quad f(x')(c+\cos x') = f(x')(c+1)$

$$f(x'')(c+\cos x'') = f(x'')(c-1)$$

se $c = -1$

$c = 1$



$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty}$$

$x = x_0$ è asintoto verticale

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$ asintoto orizzontale (può essere intersecato dalla funzione)

ASINTOTO OBLIQUO. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ $\{q$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$

$y = mx + q$

Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi Matematica

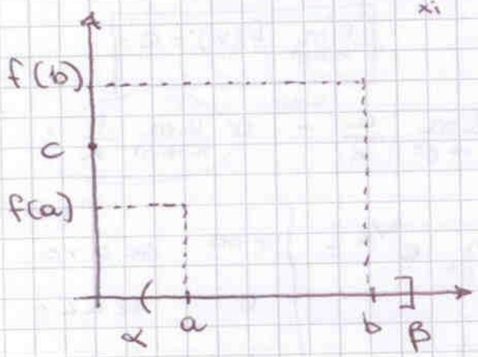
XXII lezione
12/11/10

FUNZIONE CONTINUE

Teorema dei valori intermedi: sia f una funzione continua in un intervallo I e siano $a, b \in I$ $(a<b)$.

Sia $c \in \mathbb{R}$ e compreso tra $f(a)$ e $f(b)$

$\rightarrow$ allora $\exists$ un $\underset{xi}{\xi} \in [a,b] \,/\, f(\xi) = c$

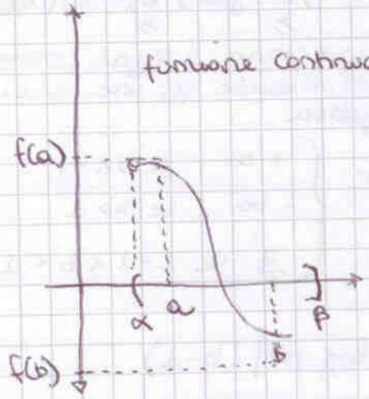


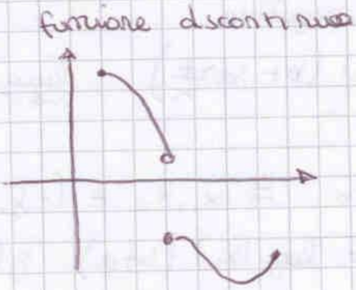
(!) se prendo tutti i punti dell' intervallo ottengo un insieme che è un intervallo

Teorema di esistenza degli zeri: sia f continua in un intervallo I e siano $a, b \in I$ $(a<b)$

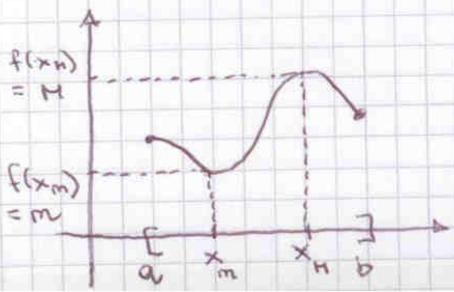
Sia $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\ \xi \in (a,b) \,/\, f(\xi) = 0$

Garantisce l'esistenza di almeno uno zero





Teorema di Weierstrass: sia f continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. allora f ~~alla~~ è dotata di un massimo e minimo assoluti.



$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \boxed{\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

TEOREMA: Se la funzione associata alla successione $\{a_n\}$ è regolare, allora si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n$

Calcolare che

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$. si passa alla funzione associata $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi n) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sin(\pi x) = \nexists$$

(!) se la funzione associata è irregolare non è detto che la successione lo sia

$$a \in \mathbb{R} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{1/x} \qquad \frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{1}{t} = x$$

1 caso) (0^+) $x > 0$ se $x \to 0^+$, $t \to +\infty$

$$= \lim_{t\to+\infty} \log_a \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}\right] = \boxed{\log_a e}$$

2 caso) (0^-) $x < 0$ se $x \to 0^-$, $t = -\infty$

$$\lim_{t\to 0^-} \log_a \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{e}\right] = \boxed{\log_a e}$$

allora $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$

Analisi Matematica : DERIVABILITÀ — XXIII lezione 15/11/10

$$f: D \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

$\boxed{x_0 \in D \cap \mathcal{D}D}$

$\boxed{h \in \mathbb{R} \mid x_0 + h \in D}$

h = incremento

la funzione f è derivabile in x_0 se questo rapporto nella variabile h converge al tendere di h a 0

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ rapporto incrementale

$$\rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$$

$x = x_0 + h$

$h = x - x_0 = \Delta x$

se $h \to 0$ allora $x \to x_0$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

l è la derivata della funzione nel punto x_0

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = D_x f(x_0)$$ (tre modi di scrivere diversi per esprimere la stessa cosa)

f è derivabile in un sottoinsieme del dominio $A \subseteq D$ se è derivabile

$$\forall x \in A \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

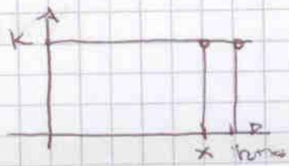
$$f'(x): A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f'(x)$$ derivata prima della funzione f

A è l'insieme di derivabilità

f' è derivabile in $B \subseteq A \subseteq D$ è derivabile in ogni punto di B

$$f'': B \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f''(x)$$

<u>Es</u>: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \{k\}$
$x \longmapsto y = f(x) = k \qquad x \in \mathbb{R}$



$$\lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0 = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

la funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}$

$c = -1 \qquad 0 \leq f(x)\left[c + \cos x\right] \leq \underset{+\infty}{-2\, f(x)} \qquad \forall x > \delta$

$\forall \delta > 0 \quad \exists\, x', x'' > \delta \;\Big|\; f(x)(c + \cos x') = 0$

$f(x'')(c + \cos x'') = -2 \cdot f(x'')$

Analisi Matematica

XXIII lezione
15/11/10

$$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \sqrt{x}$$

$\sqrt{4} = +2$

solo derivabilità destra perché non ha senso studiare quella a sinix perché non app. al dominio

$\forall x > 0$ (posso considerare l'incremento negativo)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$$

non posso considerare l'incremento negativo perché a sinix di 0 la funzione non è definita

$$x=0 \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{h}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

la funzione non è derivabile in 0

f è derivabile $\forall x \in D \setminus \{0\}$ e si ha $\forall x \in D \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

<u>Es</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \longmapsto y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \cancel{x+h-x}$$

$$(A^3 - B^3) = (A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$A - B = \frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2} \qquad \begin{cases} A = \sqrt[3]{x+h} \\ B = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{con } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{x^2} \qquad \sqrt[3]{x^2}$

Esercizio d'esame

$$f(x) = \begin{cases} e^{a/x} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{1}{\log|x|\cdot(b+\operatorname{sen}\frac{1}{x})} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Studiare per quali valori reali la funzione è continua in 0

$f(0)=0$ $\quad \forall a<0 \quad \boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x)=0}$ $\quad \forall a>0 \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0}$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{a/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} \overset{a\neq 0}{=} a \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}_{+\infty}$$

$$a\begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \\ 0 & \text{se } a=0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{a/x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ 0 & \text{se } a<0 \\ 1 & \text{se } a=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\log|x|}_{-\infty} \overbrace{\underbrace{\left(b+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}_{\nexists}}^{g(x)}$$

nell'intorno sinistro di 0^- la funzione è negativa quindi sto moltiplicando per un numero negativo

$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \forall x\neq 0$

$b-1 \le b+\sin\frac{1}{x} \le b+1 \quad \forall x\neq 0$

$\log|x|\,(b-1) \ge g(x) \ge (b+1)(\log|x|)$

si invertono i segni perché sto moltiplicando per una quantità negativa

$$g(x) = \log|x|\left(b+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b<-1 \\ -\infty & \text{se } b>1 \\ \nexists & \text{se } -1<b<1 \end{cases}$$

$\nexists \quad \forall \delta>0 \quad \exists\, x_1, x_{11} \in (-\delta, 0) \mid$

$g(x_1) = \log|x_1|\,(b+1) \qquad g(x'') = \log|x''|\,(b-1)$

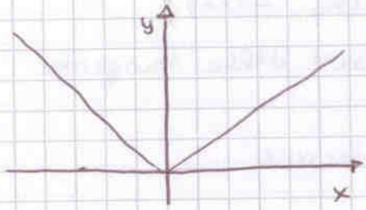
f è continua in 0 se $\forall a<0$ e $\forall b<-1$ o $b>1$

Analisi Matematica

XXIV lezione
16/11/10

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$x \longmapsto y = f(x) = |x|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



1 caso $\forall x > 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

2 caso $\forall x < 0$ $\lim_{h \to 0} \frac{-x-h+x}{h} = -1$

f è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

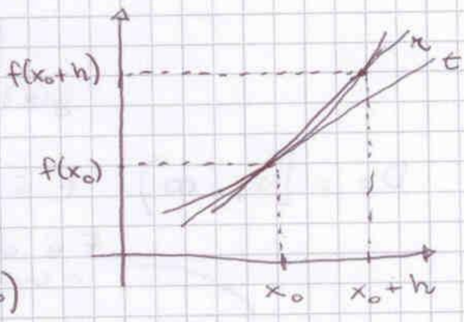
3 caso $x = 0$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$\underbrace{\lim_{h \to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1 \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{-h+0}{h} = -1}_{\text{il limite non esiste, (nell'intorno bucato di 0)}}$$

(!) non si può derivare una successione

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

f derivabile in x_0



$$r: \frac{y - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{h}$$

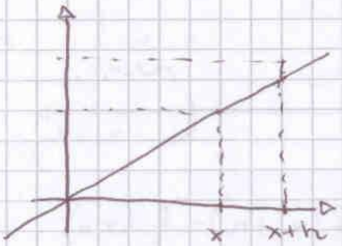
$$r: f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \Rightarrow y = f(x_0) + \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right](x - x_0)$$

⇒

$\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) = 0$ la funzione costante sarà derivabile infinite volte

Es: $x \in \mathbb{R}$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = f(x) = \boxed{x}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) = 1$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$x \longmapsto f(x) = \boxed{x^2}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = x^2 + 2xh + h^2 - x^2$$

$$\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h = 2x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) = 2x$

Es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \boxed{x^3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

$= 3x^2 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) = 3x^2$

$f: \mathbb{R} \to C$
$x \longmapsto y = f(x) = x^n$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ si ha } f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

Es $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x \longmapsto y = f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{-\cancel{h}}{(x+h)x\cancel{h}}$$

$= -\frac{1}{x^2}$

l'insieme di derivazione di f è D e
$\forall x \in D$ si ha $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Es $f: D \to C$
$x \longmapsto y = f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sono derivabili in tutto D e vale la regola:

$\forall x \in D$ $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

Analisi Matematica

XXIV Lezione 16/11/10

TEOREMA: (derivabilità di un prodotto)

Siano f e g derivabili in x_0, allora $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0, e si ha

$$F'(x) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Es: $F(x) = \underbrace{3x^2}_{\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\ln x}_{\mathbb{R}^+}$ F è derivabile in $\mathbb{R}^+ = D_F$ e

$$F'(x) = 6x \ln x + 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

TEOREMA: (" " del rapporto)

Siano f e g derivabili in x_0, allora $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0, e si ha

$$F'(x) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Es: $F(x) = tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - (-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in D$$

$$F(x) = \cot g\, x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow F'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in D$$

TEOREMA: sia f derivabile in x_0 e g derivabile in $y_0 = f(x_0)$

allora $F(x) = g[\overbrace{f(x_0)}^{y}]$ è derivabile in x_0

e si ha $$F'(x_0) = \frac{dg}{dy}(y_0) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Es $F(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $D_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $y = f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $\mathbb{R}$ escluso $x = 0$

la funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(!) indice dispari continue in tutto il loro dominio escluso lo 0

Es: $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = a^x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \ln a$$

è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha che la derivata prima coincide $f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Es: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = \ln a$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \cancel{\ln x \lim_{h \to 0} \frac{\ln h - 1}{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\ln(x+h)}{\ln(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x+h}{x}}{e^h} \Rightarrow \cancel{\lim_{h \to 0} \frac{x e^h + h e^h}{x}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x+h}{x \cdot e^h} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \ldots$$

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \mapsto y = f(x) = \sin x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \to 1 \quad = \cos x$$

f è deriv. in ogni $x \in \mathbb{R}$ e si ha $f'(x) = \cos x$

$\cos x$, $\tan x$

Analisi Matematica

XXV lezione 18/11/10

Esercizi Studiare l'insieme di Derivabilità

$$\boxed{F(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$y = f(x) = (x-1)^2$ f è derivabile in $\mathbb{R}_x$

$z = g(y) = \sqrt[3]{y}$ g è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{y=0\}$

$D_F = \mathbb{R}_x$

$y_0 = 0$ $y_0 = f(x_0)$

$0 = (x_0 - 1)^2 \Rightarrow x_0 = 1$

F è derivabile $\mathbb{R}_x \setminus \{x=1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot 2(x-1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}$$

Studio nel punto $x_0 = 1$ i.e. limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \pm\infty$$

nel punto 1 la derivata non esiste

$$\boxed{F(x) = |(x-1)^3|}$$

$y = f(x) = (x-1)^3 \to$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$z = g(y) = |y| \to$ è derivabile $\forall y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$

$0 = (x-1)^3$

$F(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}_x \setminus \{x=1\}$

$$\forall\ F(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{se } x \geq 1 \\ (1-x)^3 & \text{se } x < 1 \end{cases} \qquad \forall x \neq 1$$

$$F'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{se } x > 1 \\ -3(1-x)^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

F è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{x=1\}$ e si ha che $\forall x \neq 1$

$$F'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{se } x > 1 \\ -3(1-x)^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

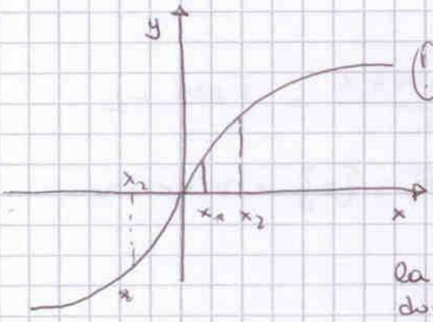
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

dal punto di vista geometrico stabilire la derivata è come stabilire la tangente del nel punto $(x_0, f(x_0))$

(!) equivale al coefficente angolare della tangente

$f'(x_0) = 0$ la funzione ne cresce ne decresce

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{per } \sqrt[3]{x}$$



(!) quando cresce la x nell'intorno di 0 la derivata è $+\infty$ (non è accettabile) perche ~~...~~ $x = K$ non è una funzione

la derivata deve essere unica (!) se ce ne sono due, la funzione non è considerata ~~continu~~ derivabile

__TEOREMA__: Siano f e g derivabile in x_0 e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

allora $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$

è derivabile in x_0 e si ha

$$F'(x_0) = c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)$$

__Es__: $3\cos x - \sqrt{x}$ $\quad f(x) = \cos x$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x$

$g(x) = \sqrt{x}$ " " $\mathbb{R}^+$ e $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D_F = [0, +\infty)$ $\quad F$ è continua in tutto il dominio

F è derivabile nell'intersezione dei due insiemi di derivabilità

F è derivabile in $\underbrace{D_F \setminus \{0\}}_{\mathbb{R}^+}$ e si ha $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$F'(x) = -3\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Analisi Matematica

~~XV~~ XXV lezione
18/11/10

$y = f(x) = \log_a x$ (esercizio con l'ultimo teorema)

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$
$$y \rightarrow x = g(y) = a^y$$

$$\frac{dg}{dy}(y) = a^y \cdot \log_a \neq \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

allora $y = f(x)$ è derivabile in tutto il suo dominio

$(0, +\infty)$ e $\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{a^y \ln a} \Rightarrow \frac{1}{x \cdot \log_a a} \quad \forall x \in D_f$

devo stabilire la derivabilità dell'arcoseno

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \sin x$$

f è derivabile in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = \cos x$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad f'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\cdot g : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \longmapsto x = g(y) = \text{arc sen } y$$

g non è derivabile nei punti $y_1 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e $y_2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$-1 \qquad\qquad 1$

la funzione arcoseno non è derivabile agli estremi del dominio

$\forall y \in (-1, 1)$ g è derivabile e $\forall y \in (-1, 1)$

$$\frac{dg}{dy}(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - y^2}}$$

in questo caso particolare visto che $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

il risultato è $= \frac{1}{+\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$

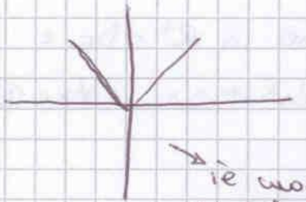
$z = g(y) = e^y$ " " in $\mathbb{R}_y$

in $D_F = \mathbb{R}_x \setminus \{x = 0\}$ è definita, continua e derivabile

e $\forall x \in D_F \Rightarrow F'(x) = e^y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$

TEOREMA: (relazione tra continuità e derivabilità)

Sia f derivabile in x_0 allora f è continua in x_0



f derivabile in $x_0 \Rightarrow$ f continua in x_0

la condizione è necessaria ma non sufficiente

$\not\Leftarrow$

è modulo di x
e ~~definita~~ in tutto $\mathbb{R}$
continua
ma nel punto x_0 non
è derivabile

Dimostrazione: the $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) - f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{0} = 0$$

Analisi Matematica

XXVI lezione
19/11/10

ESERCIZI D'ESAME

$f(x) = \text{arctg}x + e^x$

1) verificare l'invertibilità della funzione, studiare
2) il dominio e il codominio
3) $g'(1) = ?$

visto che $\text{arctg}x + e^x$ sono due funzioni strettamente crescenti

$f: \uparrow$ in $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ è iniettiva e quindi invertibile nel dominio

$f: \mathbb{R} \to C_f$
$x \mapsto y = f(x)$

f è continua in $\mathbb{R}$

$g: C_f \to \mathbb{R}$
$y \mapsto x = g(y)$

$$C_f = \left(\lim_{x \to -\infty} f \; ; \; \lim_{x \to \infty} f \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$C_f = \left(-\frac{\pi}{2} \; ; \; +\infty \right)$$

Se non conosco l'espressione inversa utilizzo il teorema della derivabilità della funzione inversa

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

allora la funzione g è derivabile $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right), \quad \frac{dg}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{1}{1+x_0^2} + e^{x_0}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ x_0 = g(y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} +1 = f(x_0) \\ x_0 = g(1) \end{cases} \to \text{non conosco l'espressione di } g$$

$$\boxed{1 = \text{arctg}\, x_0 + e^{x_0}}$$

$x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(1+h)-F(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h^3|}{h} - 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{h} = 0 \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^3}{h} = -0$$

In uno in realtà la funzione è derivabile e vale 0

F è derivabile in $\mathbb{R}$

TEOREMA: (derivabilità della funzione inversa)

Sia $y=f(x)$ continua e invertibile almeno in $I_\delta(x_0)$ e derivabile nel punto x_0. Sia $f'(x_0) \neq 0$

allora la funzione inversa $x=g(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$\frac{dg}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)} \qquad \text{dove } x_0 = g(y_0)$$

Se $f'(x_0)=0$ allora g non è derivabile in y_0

Se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$

allora g è derivabile in y_0 e si ha $\frac{dg}{dy}(y_0) = 0$

Analisi Matematica

XXVI lezione 19/11/10

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL:

Siano f e g derivabili in $I(a) \setminus \{a\}$ e siano infinitesime (o divergenti) per $x \to a$

Sia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ regolare per $x \to a$

allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è regolare per $x \to a$

e si ha che $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\quad \sin x \to 0$, $x \to 0$

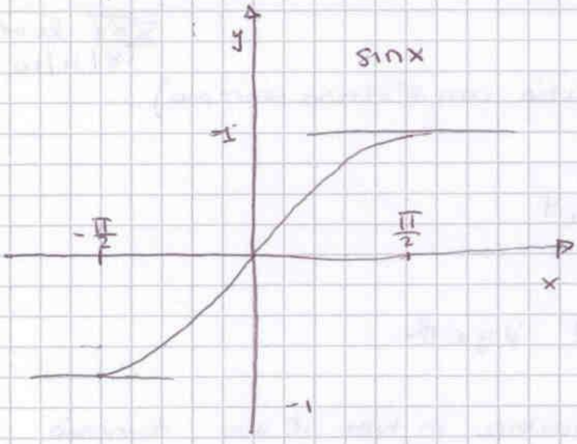
vei $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$ 1

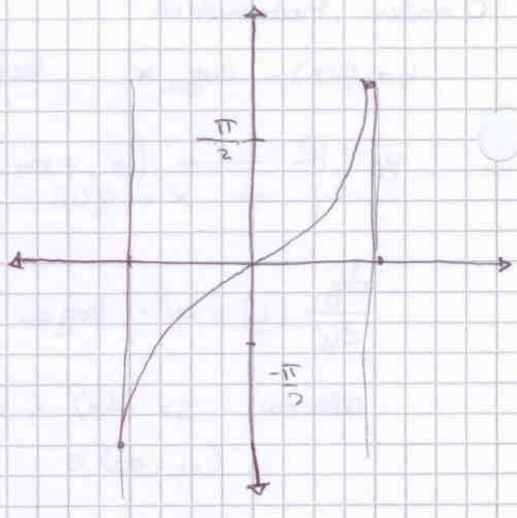
Es: $\lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 0}{x^2} \overset{\to \nexists}{\sin \frac{1}{x}}}{\underset{\to 0}{\ln(1+x)}} = \frac{0}{0}$ $\quad \underset{\downarrow 0}{-x^2} \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq \underset{\downarrow 0}{x^2}$

$$\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \nexists \left(\underbrace{2(1+x)x \sin \frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{(1+x)}_{1} \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\nexists} \right) = \nexists$$ ma è anche

Sbagliato dirlo perché non è regolare





Studiare arcocoseno!

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = tg\,x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \text{ in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y \longmapsto x = arc\,tg\,y$$

g è derivabile in $\mathbb{R}$

$\forall y \in \mathbb{R}$

$$\frac{dg}{dy}(y) = \cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Analisi Matematica

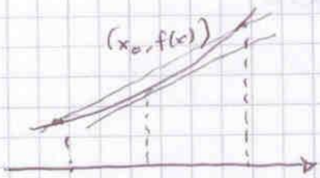
XXVII lezione
22/11/10

2) $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \mp\infty$

x_0 si dice punto cuspidale per f
$(x_0, f(x_0))$ cuspide di f

3) $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$

x_0 è si dice punto di flesso a tangente verticale < ascendente ($+\infty$) / discendente ($-\infty$)

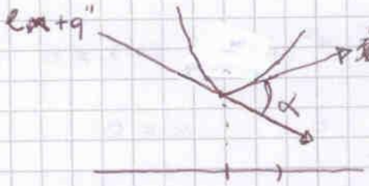


casi di non derivabilità

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = l$

$l \neq m$

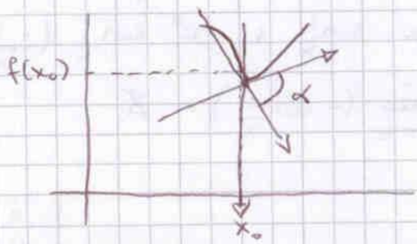
$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = m$



$0° < \alpha < 180°$

$x_0 \Rightarrow$ punto angoloso

$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$ $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l > 0$



$0 < \alpha < 180$

Esercizio

$y = f(x) = \sqrt[4]{x}$

studiare l'insieme di derivabilità con il teorema della derivabilità della funzione inversa

$y_n \; [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$x = g(y) = y^4 : [0, +\infty) \to [0 + \infty)$

g è derivabile in $[0, +\infty)$

$$\frac{dg}{dy}(y) = 4y^3 \begin{cases} = 0 & \text{se } y = 0 \\ > 0 & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

$g(0) = x_0 = 0 \Rightarrow f$ non è derivabile in 0

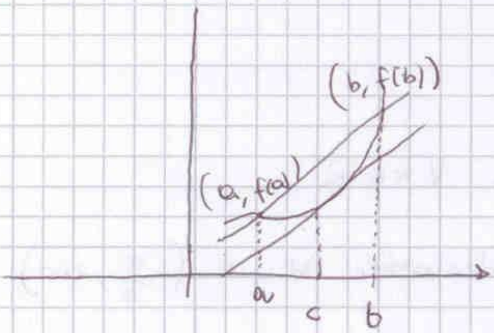
f è derivabile $\forall x > 0$ $\quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

TEOREMA DI LAGRANGE: teorema fondamentale della derivabilità

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

Allora $\exists\, c \in (a,b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:



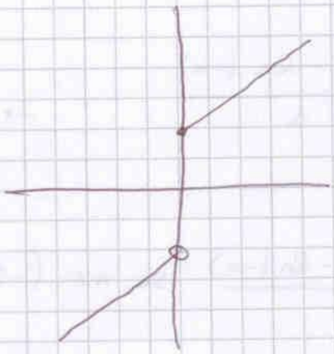
Analisi Matematica — XXVII° lezione 22/11/10

$$f' = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Osservazione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità nel dominio



f è continua in $D \setminus \{0\}$

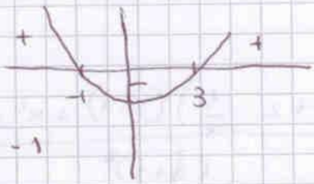
non essendo continua in 0 non è derivabile

f è derivabile in $D \setminus \{0\}$

ES: Determinare i valori che deve assumere il parametro α affinchè sia continua anche nel punto 1 e derivabile nel punto -1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-2x-3| + |\ln(-x)|}{|x+1|} & x \in (-3, 0) \setminus \{-1\} \\ \alpha & x = -1 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$$



$$|x^2-2x-3| = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\ln(-x) > 0 \qquad -x > 1 \qquad x < -1$$

$x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$\frac{x^2}{\ln(x+1)} \le \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\ln(x+1)} \le \frac{x^2}{\ln(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x)} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+1}} = 0$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{+1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{+1/x}}{1} = \frac{0}{0}$$

$$t = \frac{1}{x} \qquad \lim_{t\to -\infty} t\, e^t = \infty \cdot 0 \qquad \frac{e^t}{1/t} = \frac{0}{0} \qquad \frac{t}{e^{-t}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = 0$$

TEOREMA: Sia f continua in un intorno opportuno di $I_\delta(x_0)$ e derivabile in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

Se $f'(x)$ è convergente per $x \to x_0$ allora f è derivabile anche in x_0 e si ha $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$
posso aggiungere anche x_0 e vale l

(!) questo teorema serve a non utilizzare il limite del rapporto incrementale

CONDIZIONI DI NON DERIVABILITA':
f non è derivabile in x_0 se

1) $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0^{\mp}} f'(x) = \begin{cases} m \in \mathbb{R} & m \ne l \\ \pm\infty \end{cases}$

x_0 si dice punto angoloso per f
$(x_0, f(x_0))$ angolo di f

Analisi Matematica

XXVII lezione
22/11/10

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2-2x-2-\frac{1}{x}+\ln(-x)}{(x+1)^2} \\ -1/2 \end{cases}$$ perché prende questo?

XXVIII lezione
23/11/10

$$f: D \to C$$
$$x \longmapsto y = f(x) = k \qquad D \subseteq \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in D$$

$$f: A \to C$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

f è derivabile in A e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in A$ $\Rightarrow$ $f(x) =$ costante in A

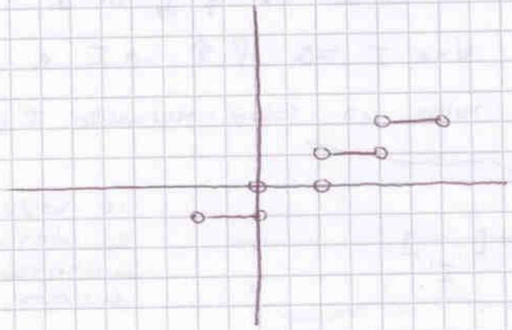
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in A e $f'(x) = 0$ $\forall x \in A$

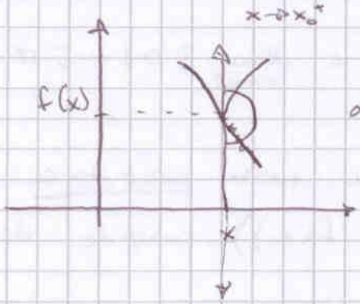
$\cancel{f(x) = [x]}$

$D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\qquad f(x) = \lfloor x \rfloor : \mathbb{R}$

$f'(x) = 0$
$\forall x \in D$

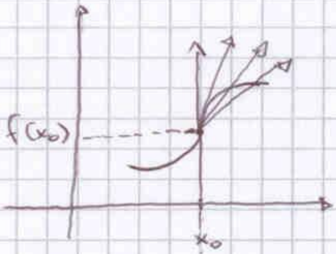


$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$ $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$



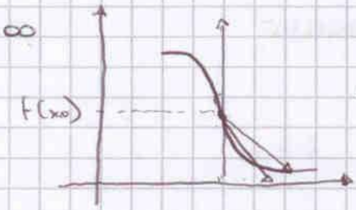
$\alpha = 180°$

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$



$\alpha = 0$

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$



$\alpha = 0$

Es (d'esame) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Studiare la derivabilità nell'origine

$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ (per il confronto) f è continua in $I_f(0)$

e derivabile in $I_f(0) \setminus \{0\}$

$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(-\cos\frac{1}{x}\right) = \nexists$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\frac{1}{h}}{h} = 0$

f è derivabile anche in 0 e si ha

Analisi matematica

XXVIII lezione
23/11/10

TEOREMA: sia f continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

se $f'(x)<0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ e $f'(x)>0 \ \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

$\Rightarrow x_0$ è minimo relativo
massimo

(!) vale anche se la funzione non è derivabile nel punto

Esercizio d'esame

$f(x) = e^{3-2x}(|x^2-2|+x)$ det. gli estremi relativi nel rispettivo dominio

$D = \mathbb{R}$ f è continua in $\mathbb{R}$

$$|x^2-2| = \begin{cases} x^2-2 & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ 2-x^2 & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{3-2x}(x^2+2+x) & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ e^{3-2x}(-x^2+x+2) & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$?

$$f'(x) = \begin{cases} e^{3-2x}(-2x^2+5) & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ e^{3-2x}(2x^2-4x-3) & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -\sqrt{2}^-} f'(x) = e^{3+2\sqrt{2}} \\ &\lim_{x\to -\sqrt{2}^+} f'(x) = e^{3+2\sqrt{2}}(1+4\sqrt{2}) \end{aligned}\right\} \text{punto angoloso}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to \sqrt{2}^-} f'(x) = e^{3-2\sqrt{2}}(1-4\sqrt{2}) \\ &\lim_{x\to \sqrt{2}^+} f'(x) = e^{3-2\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \text{punto di minimo relativo}$$

81

$$|\ln(-x)| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{se } -3<x<-1 \\ -\ln(-x) & \text{se } -1<x<0 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } -1<x<0 \\ -x-1 & \text{se } -3<x<-1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3+\ln(-x)}{-x-1} & -3<x<-1 \\ \dfrac{-x^2+2x+3-\ln(-x)}{x+1} & -1<x<0 \\ \alpha & x=-1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x+3-\ln(-x)}{x+1} & \text{se } x\in(-3,-1)\cup(-1,0) \\ \alpha & \text{se } x=-1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{-x^2+2x+3-\ln(-x)}{x+1} \Rightarrow \frac{0}{0} \quad \lim_{x\to-1} \frac{-2x+2+\left(-\frac{1}{x}(-1)\right)}{1} = 5$$

$\alpha = 5$

Verifico se è derivabile in x_0

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = \lim_{x\to-1} \frac{-x^2-2x-2-\frac{1}{x}+\ln(-x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \left(-2x+2-\frac{1}{x}\right)(x+1)$$

$$f'(x) = \left(-2x+2-\frac{1}{x}\right)(x+1)+x^2-2x$$

$\frac{0}{0}$

$$f'(x) = \frac{\left(-2x+2-\frac{1}{x}\right)(x+1)+x^2-2x-3+\ln(-x)}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{-2x-2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{2(x+1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to-1} \frac{-2-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$f'(x)=$

Analisi Matematica

PUNTO DI FLESSO

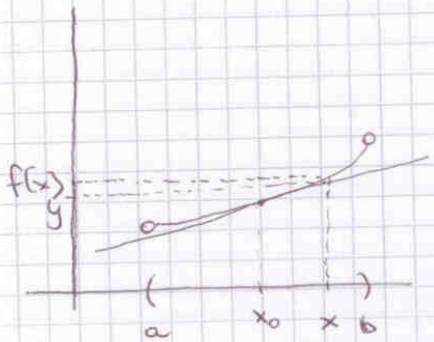
XXIX lezione
26/11/10

Definizione: Sia f derivabile in un intervallo I

f si dice convessa (concava) in I se $\forall x_0, x \in I$

si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

concava se $f(x) \leq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{=y}$



DEFINIZIONE: Sia f derivabile in $I_\delta(x_0)$

x_0 si dice pto di flesso di f se f è concava (convessa) in $(x_0 - \delta, x_0)$ ed è convessa (concava) in $(x_0, x_0 + \delta)$

DEFINIZIONE: Sia f derivabile in $I_\delta(x_0)$ e sia x_0 pto di flesso di f

Se f ammette in x_0 derivata seconda

allora $f''(x_0) = 0$ (non implica necessariamente che esista il punto di flesso)

TEOREMA ~~DEFINIZIONE~~: Sia f derivabile 2 volte in un intervallo I

Se $f''(x) > 0$ in I $\Rightarrow$ f è convessa in I

Se $f''(x) < 0$ " $\Rightarrow$ f è concava in I

e non si annulla in tutto un sotto intervallo $I' \subseteq I$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

TEOREMA: Sia f derivabile in un intervallo I. Se $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ allora $f(x) =$ costante in I

<u>Definizione</u>: $x_0 \in D_f \cap DD_f$ si dice punto di massimo (minimo) relativo per la funzione f se $\exists\ \delta > 0 /$ $\forall x \in D_f \cap I_\delta(x_0)$ si ha $f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0)$ $\Rightarrow$ punti di estremo relativo

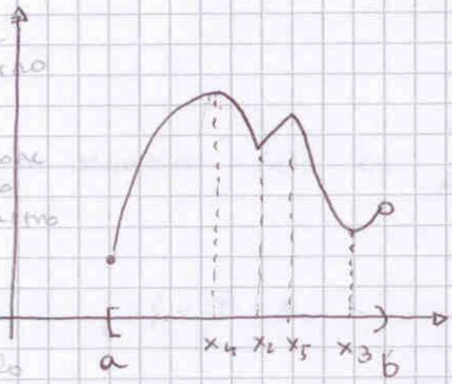
punti di estremo relativo

<u>TEOREMA DI FERMAT</u>: Sia $x_0 \in D_f$, un punto di estremo relativo per f. Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

$x_0 \to$ punto interno

$\Rightarrow$ ① questo teorema mi da una condizione necessaria ma non ~~derivabile~~ sufficiente

per definizione di punto interno il punto che devo prendere in considerazione deve avere sia un intorno destro che sinistro quindi non posso prendere gli estremi dell'intervallo



$f: [a, b) \to C$

$f'(x) = 0 <\begin{matrix} x_4 \\ x_3 \end{matrix}$

$\forall x \in [a, b) \setminus \{a, x_2, x_5\}$

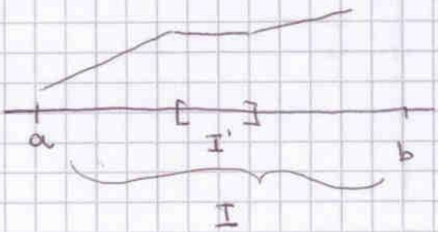
$f'(a) > 0$ perché non è un punto interno

TEOREMA: Sia f derivabile in un intervallo I

se $f'(x) > 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f \uparrow$ (strettamente crescente) in I

se $f'(x) < 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f \downarrow$ in I

se $f'(x) \geq$ $\forall x \in I \Rightarrow f \uparrow$ in I e $f'(x)$ non si annulla in tutto un sotto intervallo $I' \subseteq I$



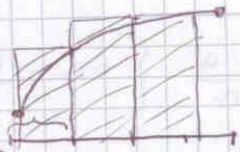
ie sotto insieme in cui la derivata prima si annulla deve essere discreto

Analisi matematica

~~XXX~~ lezione
29/11/10

INTEGRALI: INIZIO SECONDA PARTE CORSO DI ANALISI

Sia f continua in $[a,b]$



$[x_{i-1}, x_i]$

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_{n-1} \quad b = x_n$

$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

$n \in \mathbb{N}$

le n parti sono tutte uguali

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \in \mathbb{R}$ (somma integrale)

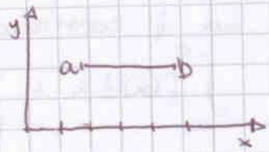
$\{\sigma_n\}$ (successione delle somme integrali)

TEOREMA: sia f continua nell'intervallo $[a,b]$ allora $\{\sigma_n\}$ converge $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = l \in \mathbb{R}$ e si definisce l'integrale definito relativo all'intervallo $[a,b]$ della f continua

(1) → la convergenza a questo punto è uguale qualunque sia la suddivisione degli intervallini

Es: $f(x) = c$

$\int_a^b c\,dx$



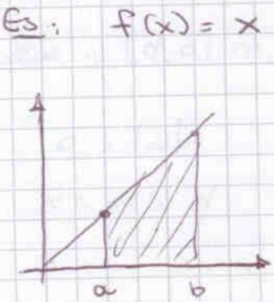
$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = c(b-a) = \int_a^b c\,dx} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} c =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot c \sum_{i=1}^{n} 1 \;(= n) = c(b-a)$$

Es: $f(x) = x \qquad \int_a^b x\,dx$

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{(b-a)}{n} =$



$= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i =$

$x_1 = a + \frac{b-a}{n} \qquad x_2 = a + \frac{2b-a}{n}$

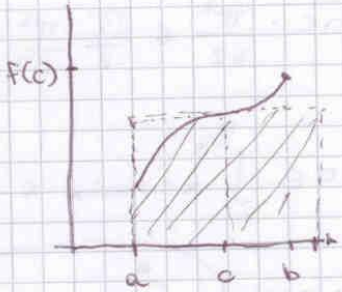
0 $\quad a \equiv x_0 \quad x_1 \quad x_2$

Analisi Matematica ~~XXX~~ ennone 29/11/10

TEOREMA DELLA MEDIA: Sia f continua in $[a,b]$. allora

$$\exists\, c \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

$$m_f(b-a) \leq f(c)\cdot(b-a) \leq M_f(b-a)$$



TEOREMA DELLA MEDIA PESATA: Siano f e g continue in $[a,b]$ e $g(x) \geq 0$ (≤ 0) in $[a,b]$. allora $\exists\, c \in [a,b] \,/$

$$m \cdot \ell \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\cdot \int_a^b g(x)\,dx \leq M\cdot \ell$$

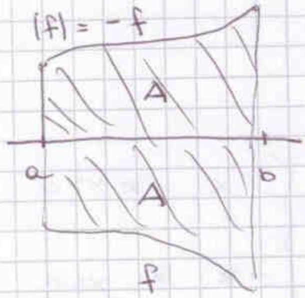
dove M, m sono massimo e minimo di $f(x)$.

(!) il massimo e minimo esistono sempre in un intervallo chiuso per il teorema di Weierstrass

(!) questo teorema è utile quando non si riesce a determinare l'integrale (è impossib)

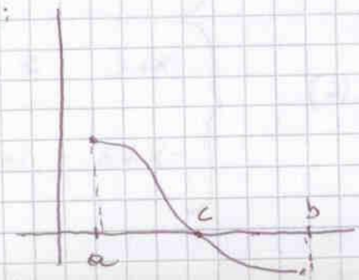
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI INTEGRALE NEG.

Sia f continua in $[a,b]$ e $f(x) \leq 0$ in $[a,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx = -A$$

Es:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \text{area}(A) + (-\text{area}(B))$$

TEOREMA: Sia f derivabile in $I_\delta(x_0)$ e derivabile 2 volte in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora

se $f''(x) > 0$ in $(x_0-\delta, x_0)$ e $f''(x) < 0$ in $(x_0, x_0+\delta)$

se $f''(x) < 0$ in $(x_0-\delta, x_0)$ e $f''(x) > 0$ in $(x_0, x_0+\delta)$

ESERCIZIO D'ESAME

disegnare il grafico

$$f(x) = \frac{3 + |5 - x|}{|x| + 2}$$

1) Dominio $\mathbb{R}$

2) Segno sempre positivo

3) Intersezioni con gli assi $f(0) = 4$

4) Proprietà di simmetria f è continua nel dominio

5) Comportamento di f agli estremi del dominio ?

f' è derivabile in $\mathbb{R} - \{0, 5\}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

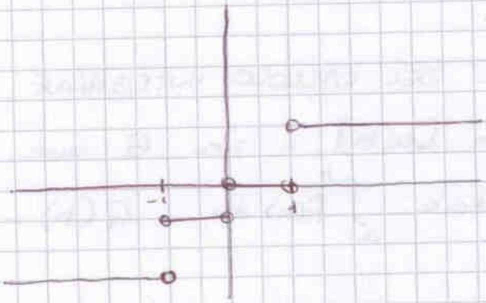
FINE PRIMA PARTE!

Analisi Matematica

XXXI lezione
30 /11/10

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 < x < \infty \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -2 & \text{se } -\infty < x < -1 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$



$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 1 \\ 3 & \text{se } x \in (0,1) \\ -x+5 & \text{se } x \in (-1,0) \\ -2x-3 & \text{se } x \in (-\infty,-1) \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ -2 & (0,1) \\ -x-1 & (-1,0) \\ -2x-2 & (-\infty,-1) \end{cases}$$

TEOREMA: Siano g e h primitive di f in un intervallo I. allora $h(x) - g(x) = c$ $\forall x \in I$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (0, +\infty) = A$

$g(x) = \ln x \qquad h(x) = \ln x + c$

Dimostrazione: $H(x) = h(x) - g(x)$

$$H'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow H(x) = c \quad \forall x \in I$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{b-a}{n}\right\}$$

$$= \frac{b-a}{n}\left\{na + \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} i\right\} = \frac{b-a}{n}\left\{n\cdot a + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2\cdot\cancel{n}(n+1)}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \cancel{ab} - a^2 + \frac{b^2}{2} - \cancel{ab} + \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}$$

(!) l'integrale è un limite

<u>TEOREMA DI LINEARITÀ</u>: sia f e g continue in $[a,b]$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. allora

$$\int_a^b \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right) dx = c_1\int_a^b f(x)\,dx + c_2\int_a^b g(x)\,dx$$

<u>TEOREMA DI ADDITIVITÀ</u>: sia f continua in $[a,b]$ e $c \in (a,b)$

allora $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<u>TEOREMA DEL CONFRONTO</u>: (O DELLA MONOTONIA)

siano f e g continue in $[a,b]$ e sia $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$. allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>TEOREMA DEL MODULO</u>: sia f continua in $[a,b]$. allora

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$|a| < b$

$-b < a < b$

Analisi Matematica

~~XXXI~~ lezione
30/11/10

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N},\ \forall x \in [0,+\infty)$$

$$\int \frac{1}{x} \begin{cases} \nearrow \text{se } x>0 \quad \ln x + c_1 \\ \searrow \text{se } x<0 \quad \ln(-x) + c_2 \end{cases} \Bigg\} \, g(x)$$

$\frac{1}{x}$ è continua in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$$g(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & \text{se } x>0 \\ \ln|x| + c_2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \begin{cases} \nearrow x>0 \quad -\frac{1}{x} + c_1 \quad \text{se } x>0 \\ \searrow x<0 \quad -\frac{1}{x} + c_2 \quad \text{se } x<0 \end{cases}$$

$\frac{1}{x^2}$ è continua in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$$

$\sqrt{x}$ è continua in $[0,+\infty)$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+c$$

$\sqrt[3]{x}$ è continua in $\mathbb{R}$

ESERCIZIO ~~DE~~ D'ESAME

$$c \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\int_0^{\pi/4} x \cdot \underbrace{\sin x}_{f} \, dx = \sin c \cdot \int_0^{\pi/4} x \, dx = \sin c \left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right) =$$

$$= \sin c \cdot \frac{\pi^2}{32} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi^2}{32}$$

$$0 \leq \int_0^{\pi/4} x \sin x \, dx \leq \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{64}$$

Convenzioni: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

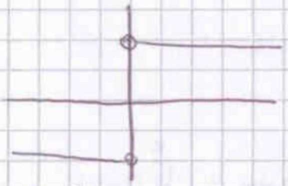
Sia f definita in $A \subseteq \mathbb{R}$

DEFINIZIONE: una funzione g, derivabile in A, si dice primitiva di f in A se

$$g'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

TEOREMA: Se g è una primitiva di f in un sottoinsieme di f in $A \subseteq \mathbb{R}$ allora anche $h(x) = g(x) + c$ è una primitiva di f in A $\forall c \in \mathbb{R}$

Es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



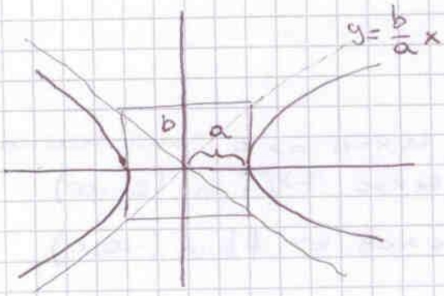
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) - h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x > 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ -x+3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

XXXII lezione
1/12/10

Analisi Matematica

FUNZIONI IPERBOLICHE



$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Studio ie grafico del seno iperbolico

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sinh x$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f \Uparrow$ in D

$$C = \left(\lim_{x \to -\infty} f, \lim_{x \to +\infty} f\right) = (-\infty, +\infty)$$

$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x = \underbrace{\frac{e^{-x}}{2}}_{>0} (e^{2x} - 1)$$

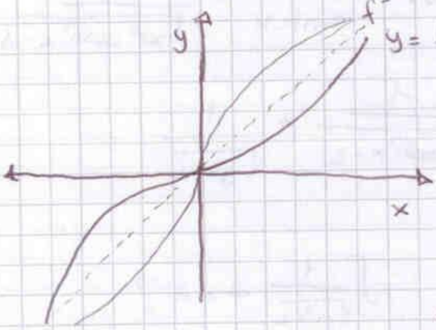
$f''(x) = f(x) = 0$ se $x = 0$ flesso

$e^{2x} = 1$

$x = 0$

> 0 se $x > 0$ $\cup$

< 0 se $x < 0$ $\cap$



$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) =$ settore $\sinh y$

f^{-1} è derivabile in $\mathbb{R}$

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{sett} \sinh x + c} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

I TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f una funzione continua in un intervallo I e sia $a \in I$. Sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{dove } x \in I$$

allora F è derivabile in I e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

II TEOREMA FOND. DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f continua in $[a,b]$ e sia G una primitiva di f in $[a,b]$. allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{tutte le primitive di } f \text{ nel rispettivo} \\ \text{insieme di continuità} \end{array} \right\}$$

$$\int k\,dx = kx + c \quad \forall x \in \mathbb{R},\ e\ \forall c \in \mathbb{R}$$

insieme di funzioni

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{" "}$$

x è continua in $\mathbb{R}$

Es: $\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

x^2 è continua in $\mathbb{R}$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \Big| \ \forall n \in \mathbb{N}$$

x^n è continua in $\mathbb{R}$

XXXIII lezione
1/12/10

Analisi Matematica

$f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$

$x \longmapsto y = f(x) = tg\,h x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$

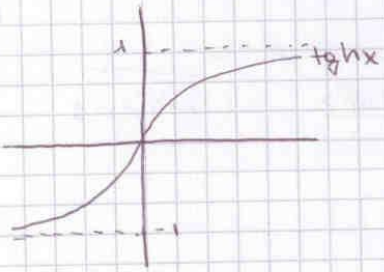
$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \Rightarrow f \uparrow$ in $\mathbb{R}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = D_x [\cosh^{-2} x] = -2 \cosh^{-3} x \cdot \sinh x = \frac{-2 \sinh x}{\cosh^3 x}$

$$\begin{cases} = 0 & \text{se } x = 0 \quad \text{p.to di flesso} \\ > 0 & \text{se } x < 0 \quad \cup \\ < 0 & \text{se } x > 0 \quad \cap \end{cases}$$

$C = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = -1 \right.$;

$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1 \right)$



$f^{-1}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \text{sett}\,tg\,h y$

f^{-1} è derivabile in $(-1, 1)$

$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{1 - y^2}$

$$\boxed{\int \frac{1}{1 - x^2} = \text{sett}\,tg\,h\, x + c}$$

$\forall x \in (-1, 1)$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$$

x^α è continua in $(0, +\infty)$

$$\int e^x \, dx = e^x + c \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c \qquad \int \frac{D_x(-\cos x)}{\cos x} \, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)|$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln [\pm f(x)] + c}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx , \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx , \quad \int \frac{1}{1-x^2} \, dx$$

$\mathbb{R}$ $\qquad$ $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

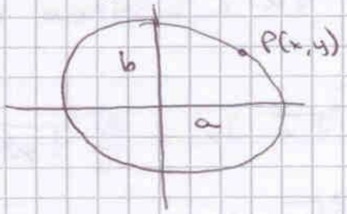
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$\begin{cases} \cos x \\ \sin x \end{cases}$ funzioni circolari



$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

XXXIV lezione
3/12/10

Analisi matematica

TEOREMA: (METODO DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE)

$y = f(x)$

f continua in $[a, b]$. Sia $t = \varphi(x)$ una funzione derivabile e invertibile in $[a, b]$. allora

$x = \varphi^{-1}(t)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left(f\left[\varphi^{-1}(t)\right] \cdot \frac{d\varphi^{-1}}{dt}(t) \right) dt$$

Calcolare con la definizione:

Es: $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}$

$x = \varphi^{-1}(t) = \sin t$

$t = \varphi(x) = \arcsin x$

$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \; dt$$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$= \int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \Rightarrow$$

$\frac{\sin 2t}{2}$

$s = 2t = \varphi^{-1}(t)$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Stesso esercizio con la tecnica "meccanica"

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x = \sin t$

$t = \arcsin x$

$$\int_0^{\pi/6} \cancel{\sqrt{\sin^2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt$$

$1 \cdot dx = \cos t \cdot dt$

se $x = 0 \Rightarrow t = 0$

se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t \; dt$$

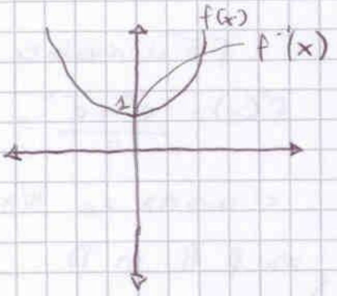
$f: \mathbb{R} \to (1, +\infty)$

$x \longmapsto y = f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \begin{cases} = 0 & \text{se } x = 0 \Rightarrow 0 \text{ min relativo} \\ > 0 & \text{se } x > 0 \Rightarrow f \uparrow \text{ in } (0, +\infty) \\ < 0 & \text{se } x < 0 \Rightarrow f \downarrow \text{ in } (-\infty, 0) \end{cases}$$

$C \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty , \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \right)$



per parlare del settore cos iperbolico applico una restrizione

$f^{-1}: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \text{sett} \cosh y$

f^{-1} non è derivabile in $x = 1$

f^{-1} è derivabile in $(1, +\infty)$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \text{sett}\cosh x + c}$$

$\forall x \in (1, +\infty)$

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{+\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Es

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \text{sett}\cosh x \Big|_{-3}^{-2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = ?$$

$(-\infty, -1)$

Analisi matematica

XXXIV lezione
3/12/10

$$\boxed{\int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\operatorname{arctg} x}\, dx} = x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - 2 \ln|1+x^2| + c$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$$

verifico se è continua $[-1,0]$

$3-2x-x^2 > 0$ $\begin{cases} -3 \\ +1 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-1-2x-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{(1+2x+x^2)}{4}\right)}} = \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} = \cancel{\frac{1}{2} \operatorname{arc sen} \frac{x+1}{2} + c}$$

col metodo passo passo

$$3-2x-x^2 = c-(x+1)^2 \qquad c-1=3$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/2} \frac{2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc sin} t \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

insieme di continuità

$$\int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \operatorname{settsinh} s \qquad \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ è positivo

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(-1) = 0$

$$t^2+2t+2 = 1+(t+1)^2$$

$$\int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1+(t+1)^2}} = \int_{0}^{x+1} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \operatorname{sett sinh} s \Big|_0^{x+1} = \operatorname{sett sinh}(x+1)$$

$s = t+1$
$ds = dt$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to C = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$x \longmapsto \cot g h x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ insieme che non è un intervallo

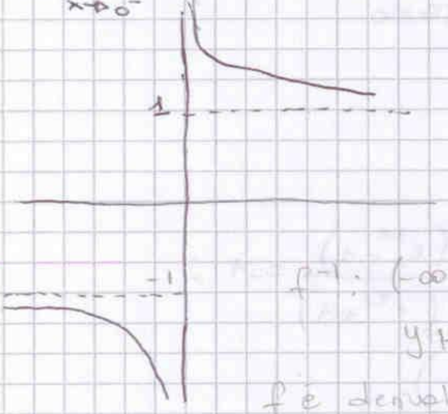
$f'(x) = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f\downarrow$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f\downarrow$ in $(-\infty, 0)$

$f\downarrow$ in $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -1$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$



Calcolare $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$

$f^{-1}: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \text{sett}\cot g h\, y$

f è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sinh^2 x}} = -\frac{1}{\dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x}} = -\frac{1}{\cot h^2 x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{1-y^2}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{1-x^2} = \cot g h\, x \Big|_2^3 \Rightarrow \frac{e^3 + \frac{1}{e^3}}{e^3 - \frac{1}{e^3}} - \frac{e^2 + \frac{1}{e^2}}{e^2 - \frac{1}{e^2}} =$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1-x^2} = \cot g h\, x \Big|_{-3}^{-2} \quad \frac{\frac{1}{e^2} + e^{+2}}{\frac{1}{e^2} - e^{+2}} - \frac{\frac{1}{e^3} + e^3}{\frac{1}{e^3} - e^3} =$$

Analisi Matematica

XXXV lezione
6/12/10

3) CASO

$$\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$$

polinomio irriducibile $(x^4-1) = (x^2-1)(x^2+1)$ = $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

polinomio di secondo grado che ammette due

ammette anche zeri complessi complessi → di molteplicità semplice

$$\boxed{\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}} = \frac{A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+\ldots}{''}$$

$$+\frac{(Cx+D)(x^2-1)}{''} = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + A-B-D$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=0 \\ D=1/2 \\ B=-1/4 \\ A=1/4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \left(-\frac{1}{4}\right)\int \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Risoluzione in modo alternativo

$x^2 = t \quad (x \geq 0) \Rightarrow x = \sqrt{t} \qquad 2dx = dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{t}{(t+1)(t-1)}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$ non conviene!

Calcolare

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} \Rightarrow \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A+C)x+A}{''}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} B=-1 \\ C=-1 \\ A=1 \end{matrix} \qquad \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

TECNICA PER POLINOMIO (AL NUMERATORE) di PRIMO GRADO DIVISO IL DENOMINATORE DI SECONDO GRADO

TEOREMA: (METODO DI INTEGRAZIONE PER PARTI)

Siano f e g derivabili in $[a,b]$. Allora $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx =$

$$= \boxed{f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]dx = f(x)\cdot g(x)$$

$$= \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

Es:

$\int 1\cdot \ln x\,dx$ $\quad x\in(0,+\infty)$

$$= \int \underset{f}{\ln x}\ \underset{g'}{\frac{d(x)}{dx}}\,dx = x\cdot\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c$$

Es:

$$\int \underset{f}{e^x}\cdot\underset{g'}{\cos x}\,dx = -e^x\cdot \operatorname{sen} x - \int e^x\cdot \operatorname{sen} x\,dx$$

$\int e^x \cos$

$$2\int e^x \cos x = \frac{+e^x\cdot \operatorname{sen} x}{2} + \frac{e^x \cos x}{2} + c$$

$$= \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2}$$

~~XXXV~~ lezione
6/12/10

Analisi matematica

1) caso

$$F(x) = -\int_x^{-1} |t|\,dt = -\int_x^{-1} -t\,dt = \int_x^{-1} d\,t\,t = \frac{t^2}{2}\Big|_x^{-1}$$

$$\to \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

2) caso $-1 \leq x < 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt = \int_{-1}^{x} -t\,dt =$$

$$= \int_x^{-1} t\,dt = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

non ho capito perché considera anche il terzo caso

3) caso $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt = \int_{-1}^{0} |t|\,dt + \int_0^x |t|\,dt = \int_{-1}^{0} -t + \int_0^x t\,dt$$

$$= \int_0^{-1} +t + \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Esercizio d'esame

Determinare D_f e C_f

$$f(x) = \int_0^x \frac{|t-1|}{t^2-t-2}\,dt$$

$g(t) = \frac{|t-1|}{t^2-t-2}$ è continua in $\boxed{(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)}$

per il dominio prendo il massimo intervallo di continuità massimo in cui è presente 0 l'estremo inferiore

$D_f = (-1, 2)$

f è derivabile in D_f

$$f'(x) = \frac{|x-1|}{x^2-x-2} < 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) \downarrow \text{in } D_f$$

$$C_f = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\ \lim_{x\to -1^+} f(x)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$x+1 = t$

$dx = dt$

$$\int \frac{1}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

calcolare:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x-1}{e^x+3}\,dx \qquad t = e^x \quad x = \ln t \quad dx = \frac{dt}{t}$$

$x = \ln 3 \Rightarrow t = 3$

$x = \ln 4 \Rightarrow t = 4$

$$\int_3^4 \frac{t-1}{t+3}\,\frac{dt}{t} \qquad \boxed{\frac{t-1}{(t+3)t} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t} = \frac{At+Bt+3B}{t(t+3)} \Rightarrow}$$

$$= \frac{(A+B)t+3B}{t(t+3)} \qquad \begin{cases} A+B = 1 \rightarrow A = 4/3 \\ 3B = -1 \rightarrow -1/3 \end{cases}$$

$$= 4/3 \int_3^4 \frac{1}{t+3}\,dt - \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{t}\,dt \rightarrow 4/3 \ln|t+3| \Big]_3^4 - \frac{1}{3}\ln|t| \Big]_3^4$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}(\ln 7 - \ln 6) - \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 3)$$

METODO DEI FRATTI SEMPLICI

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx \qquad n < m$$

Quattro 4 casi

1)

$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ si ha quando $Q_m(x)$ si annulla in m polinomi di primo grado tutti distinti

2) $\int \frac{2x+5}{(x+1)(x+3)^2}\,dx$ -3 è di molteplicità due si scrive due volte

$$\boxed{\frac{2x+5}{(x+1)(x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}}$$

$$\frac{A(x^2+6x+9)+B(x^2+4x+3)+C(x+1)}{(x+1)(x+3)^2} = \frac{(A+B)(x^2)+(6A+4B+C)x+}{''}$$

$$\frac{+9A+3B+C}{''} = \begin{cases} A+B = 0 \\ 6A+4B+C = 2 \\ 9A+3B+C = 5 \end{cases}$$

$$A\int \frac{1}{x+1}\,dx + B\int \frac{1}{x+3}\,dx + C\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$A\ln|x+1| + B\ln|x+3| - \frac{C}{(x+3)} + c$$

Analisi matematica

$\overline{XXXVI}$ lezione
4/12/10

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left\{ -\ln 2 + \frac{2}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(2-x) \right\} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left\{ \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(2-x) \right\} = +\infty$$

$C_f = \mathbb{R}$

ESERCIZIO D'ESAME

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{t^2\cos^2 t}$$

determinare il dominio, quanti zeri hanno

$t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$g(x) = \int_{-3/2}^{x} \frac{dt}{t^2\cos^2 t} =$$

$h(t) = \frac{1}{t^2\cos^2 t}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\Leftarrow$

$k=-1 \qquad k=0$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$$

$$D_f = D_g = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2\cos^2 x} > 0 \qquad f \uparrow \text{ in } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$f(-1) = 0 \qquad f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$$

$$\frac{1}{t^2\cos^2 t} \qquad \cos^2 t \le 1 \qquad \frac{1}{\cos^2 t} \ge 1$$

$$\frac{1}{t^2\cos^2 t} \ge \frac{1}{t^2}$$

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2\cos^2 t}\,dt \ge \int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{-1}^{x} = -\frac{1}{x} + 1 =$$

$$f(x) \ge -1 - \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \Rightarrow \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+c} \qquad \frac{1}{4}+c=1 \qquad c=\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}\left\{1+\frac{4}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2\right\}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx \qquad t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \qquad dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{4}2}{\cancel{3}\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

<u>ESERCIZIO D'ESAME</u>

Determinare ~~la funzione~~ l'espressione esplicita di

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt \qquad \text{dominio di } F = \mathbb{R}$$

$[-1, x]$, $[x, -1]$

1) Determinare il più ampio intervallo di continuità e contenente l'estremo inferiore di integrazione

$$|t| = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R}$

1 caso $x < -1$

2 caso $-1 \leq x < 0$

3 caso $x \geq 0$

Analisi Matematica

XXXVII lezione
9/12/10

SERIE NUMERICHE

$\{a_n\} \longrightarrow \{S_n\}$

la successione delle somme parziali è UNA SERIE NUMERICA

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

successione ; somma parziale

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R} & \text{convergente} \\ \pm\infty & \text{divergente} \\ \nexists & \text{irregolare} \end{cases}$$

$$\{S_n\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \{S_n\}$$

→ serie numerica è una particolare successione, la successione delle somme parziali costruita in questo modo

Studiare il carattere di una serie significa studiare se S_n converge, diverge

Se il limite converge a s, quest'ultimo s prende il nome di "somma della serie"

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \{S_n\} = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

a_k è il termine generico della serie

Es. SERIE TELESCOPICA o DI MENGOLI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$\Rightarrow$

$$|t-1| = \begin{cases} t-1 & se\ t \geq 1 \\ 1-t & se\ t < 1 \end{cases}$$

1 caso) $x < 1$ $\quad f(x) = \int_0^x \frac{1-t}{t^2-t-2}\,dt = -\int_0^x \frac{t-1}{t^2-t-2}$

2 caso) $x \geq 1$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{t^2-t-2} + \int_1^x \frac{t-1}{t^2-t-2} = -\int_0^1 \frac{t-1}{t^2-t-2} + \int_1^x \frac{t-1}{t^2-t-2}$$

$$\int \frac{t-1}{t^2-t-2} \Rightarrow \frac{t-1}{(t+1)(t-2)} = \frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t-2)} = \frac{(A+B)t-2A+B}{(t+1)(t-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=2/3 \\ B=1/3 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{1}{t-2}\,dt = \frac{2}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\ln|t-2| + c$$

$$\int_0^x \frac{t-1}{t^2-t-2}\,dt = \frac{2}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\ln|t-2| = \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| -$$

$- \frac{1}{3}\ln|2|$ nel 1 caso

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| & se\ x \in (-1,1) \\ -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| & se\ x \in [1,2) \end{cases}$$

$$\int_0^1 '' \,dt = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\ln 2 =$$

$$\int_1^x '' \,dt = \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln 2$$

Analisi Matematica

XXXVII lezione
9/12/10

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \quad -1<q<1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

(!) se l'esponente è razionale la base deve essere >0
se l'esponente è naturale posso assegnare anche valori ~~positivi~~ negativi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \qquad \underbrace{-\frac{1}{2^n}}_{\downarrow\, 0} \leq \frac{(-1)^n}{2^n} \leq \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\downarrow\, 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1}$$

Es: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

TEOREMA: Sia $\{a_k\}$ una successione monotona definitivamente
allora $\{a_k\}$ è regolare

TEOREMA: Sia $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}$ tale che a_k è >0 $\forall k \geq k_0$
allora la serie è regolare

$\{S_n\}$ $\qquad S_{k_0} = a_1 + a_2 + \dots + a_{k_0}$

$\qquad\qquad \wedge$

$\qquad S_{k_0+1} = S_{k_0} + \underbrace{a_{k_0+1}}_{>0}$

$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{in } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Analisi matematica

XXXVIII lez
10/12/10

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ $\boxed{\text{serie armonica}}$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

DIMOSTRARE CHE LA SERIE ARMONICA DIVERGE

Per assurdo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ è } \underline{\text{convergente}} \to \text{non converge}$$

PER SI PUO' QUINDI UTILIZZA IL TEOREMA DI CAUCHY

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall n > \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon$$

tolgo il valore assoluto poiché sto considerando numeri positivi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} \qquad \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n} \qquad \frac{1}{n+3} \geq \frac{1}{2n}$$

$$n \geq 1 \qquad n+1 \leq n+n = 2n$$

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$$

$$n \geq 2 \qquad n+2 \leq n+n = 2n \qquad \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \varepsilon \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}}_{\text{ASSURDO}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\dots$$

$$+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1$$

SERIE GEOMETRICA

$q \in \mathbb{R}$ $\qquad q$ = parametro reale

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots$$

ragione della serie

progressione geometrica

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

la ragione della progressione è il numero costante

$$\frac{q^2}{q} = q$$

con $q = 1$ $\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \qquad \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

allora $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = +\infty$

con $q \neq 1$ $\qquad$ $S_n - qS_n =$

$$\begin{cases} S_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \dots + \cancel{q^{n-2}} + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} \\ qS_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cancel{q^4} + \dots + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} + q^{n+1} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$$

se $0 < q < 1$ $\nearrow 0$ $\qquad q = -1$ $\nearrow \nexists$ $\qquad q > 1$ $\nearrow +\infty$

Analisi Matematica

XXXVIII lezione
10/12/10

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\sin k|}{2^k}$$ scelgo la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

$$\frac{|\sin k|}{2^k} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\sin k|}{2^k} = 0$$

Es studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k} \qquad \frac{|\sin k|}{k} \leq \frac{1}{k} \to +\infty \; ?$$

non serve il criterio del confronto

Es studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k} = +\infty \qquad \frac{1}{k} \leq \frac{2+\cos k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k} = +\infty$$

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tale che $a_k > 0 \quad \forall k \geq k_0$

Sia $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \Lambda$

se $0 \leq \Lambda < 1$ allora la serie converge

se $\Lambda > 1$ oppure $\Lambda = +\infty$ la serie diverge $+\infty$

se $\Lambda = 1$ il carattere della serie è indeterminato

$$\left\{ \sqrt[k]{a_k} \right\} \quad k \geq k_0$$

ESEMPIO

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$ → è di questa che studiamo il carattere

TEOREMA: Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è a termini di segno costante definitivamente

per le successioni numeriche

TEOREMA CONDIZIONI DI CONVERGENZA DI CAUCHY

Una successione $\{a_k\}$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ $/ \ \forall k > \delta_\varepsilon$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ si ha $|a_{k+p} - a_k| < \varepsilon$

TEOREMA: CONDIZIONE DI CONVERGENZA DI CAUCHY PER LE SERIE

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ /$ $\forall n > \delta_\varepsilon$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ si ha $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

perchè prova di questo risultato richiedere

$$\left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

TEOREMA: CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA PER LE SERIE

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

non è detto che se è soddisfatta questa condizione la serie debba convergere per forza. Questo teorema ci dà una condizione necessaria ma non sufficiente per dire che una serie converge

ES:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+3}{2k^2+1} \right) \qquad \{a_k\} = \left\{ \frac{k^2+3}{2k^2+1} \right\}$$

$\lim_{k \to +\infty} a_k = \frac{1}{2}$ questa serie non può convergere poichè $\frac{1}{2} \neq 0$

visto che non può essere irregolare poichè è monotona allora diverge $+\infty$

Analisi matematica

XXXIX lezione
10/12/10

CRITERIO DELL'INTEGRALE:

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tale $a_k > 0 \quad \forall k \geq k_0$

Sia $f(x)$ la funzione associata a $\{a_k\}$

e sia $f \downarrow$ in $[k_1, +\infty)$ con $k_1 \geq k_0$

Sia $t_k = \int_{k_1}^{k} f(x)\,dx \implies \{t_k\}$

Allora se $\{t_k\}$ converge (diverge) anche la serie di partenza converge (o diverge)

GENERALIZZAZIONE DEI VARI CRITERI

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ studiare al variare di $\alpha > 0$ il carattere

$\alpha \neq 1$ qualunque sia α negativo è $+\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad [1, +\infty)$$

$$\int_1^k f(x)\,dx = \int_1^k x^{-\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^k =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(k^{1-\alpha} - 1\right) = t_k$$

$$\lim_{k \to +\infty} t_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(k^{1-\alpha} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{k \to +\infty} k^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

TEOREMA. Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergenti ad A e B e siano α e $\beta \in \mathbb{R}$. Allora $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ è convergente ad $\alpha A + \beta B$

TEOREMA: Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$ e sia $\sum_{k=1}^{\infty} b_n = B$

allora $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \pm\infty$

Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \pm\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \pm\infty$$

CRITERI PER STABILIRE SE UNA SERIE CONVERGE O DIVERGE (questi criteri possono essere applicati $\Leftrightarrow$ a successioni definitivamente monotone)

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tali che $a_k > 0$ e $b_k > 0$ $\forall k \geq k_0$

sia $a_k \leq b_k$ $\forall k \geq k_1 \geq k_0$

allora

1) Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$ → dimostrarlo per casa

2) Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge → richiede re

Analisi matematica

XXXIX lezione
10/12/10

Es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2+5k-2}{k^2+3}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2+5k-2}{k^2+3}\right)$$

$$\lim_{k\to+\infty} k^{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{k^2+5k-2}{k^2+3}\right) = 0 \text{ se } \alpha \in (0,1)$$

$\alpha \geq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+5x-2}{x^2+3}\right)}{\frac{1}{x^{\alpha}}} =$$

$$\frac{1}{\frac{(x^2+5x-2)}{x+3}} \cdot \left(\frac{(x+3)(2x+5)-(x^2+5x-2)}{(x^2+3)^2}\right) =$$

$$\frac{x+3}{x^2+5x-2} \cdot \frac{2x^2+5x+6x+15-x^2-5x+2}{(x^2+3)^2} = \frac{\overset{-5x^2+10x+15}{\cancel{x^2+6x+17}}}{(x^2+3)(x^2+5x-2)}$$

$$= \frac{5}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2x-3)\, x^{\alpha+1}}{(x^2+5x-2)(x^2+3)} = \frac{5}{\alpha} \text{ se } \alpha+3=4$$

$\alpha = 1$

la serie diverge.

Studiare il carattere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{3k^2+2}\right)^k \qquad \sqrt[k]{a_k} = \frac{2k-1}{3k^2+2} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{k=1}^{\infty}$ tale $a_k > 0 \quad \forall\, k \geq k_0$

Sia $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \Lambda$

Se $0 \leq \Lambda < 1$ allora la serie converge

Se $\Lambda > 1$ oppure $\Lambda = +\infty$ la serie diverge a $+\infty$

Se $\Lambda = 1$ il carattere della serie è indeterminato

ESEMPIO :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k} = +\infty \qquad a_k = \frac{k!}{2^k} \qquad 0! = 1$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k!} = \frac{(k+1)}{2} \to +\infty$$

? chiedere come fa?

$$(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1)$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k$$

ESEMPIO

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \qquad a_k = \frac{2^k}{k!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{k+1}$$

Analisi Matematica

14/12/10

$$|s - s_n| < |s_n - s_{n+1}| = a_{n+1} \qquad s_{n+1} = s_n + (-1)^{n+1} a_{n+1}$$

Es $\alpha \in \mathbb{R} \;/\; |s - \underset{s_n}{\underset{\shortparallel}{\alpha}}| < 10^{-6}$

$a_{n+1} < 10^{-6}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA.

Se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge allora anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Definizione: Se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si dice assolutamente convergente

TEOREMA: Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente allora converge

Es: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ no al criterio poiché diverge e non si può applicare il criterio

Es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi + \frac{1}{k^3}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k^3}$$ converge per Leibniz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k^3} \qquad \lim_{k \to +\infty} \sin\frac{1}{k^3} = 0$$

CON IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$$\lim_{k \to +\infty} k^{\alpha} \cdot \sin\frac{1}{k^3} \Rightarrow \frac{\sin\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^{\alpha}}} = \Lambda$$

$\Lambda = 1 \qquad \alpha = 3$

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{k\to+\infty} k^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\begin{cases} \text{se } \alpha>1 & \text{la serie armonica gene. } \cancel{\text{diverge a } +\infty} \text{ converge} \\ \text{se } 0<\alpha\leq 1 & \text{diverge a } +\infty \end{cases}$$

Es
Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{1+k^2}$$

$$\int_1^k \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \downarrow$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}^2 k}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}$$

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$$

$$\xrightarrow{\ \ k\to\infty\ \ } \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tale $a_k>0 \quad \forall k\geq k_0$

Sia $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k^\alpha}} = \lim_{k\to+\infty} k^\alpha a_k = \Lambda \quad (\alpha>0)$

Allora
1) Se $0<\alpha\leq 1$ e $\Lambda>0$ eppure $\Lambda=+\infty \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

2) se $\alpha>1$ e $\Lambda\geq 0 \rightarrow$ la serie converge

XXXXI lezione
11/01/11

Analisi Matematica

FORMULA DI TAYLOR

f continua in $I_\delta(x_0)$ e derivabile n volte in x_0

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

↳ per motivi di calcolo si può riscrivere così

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

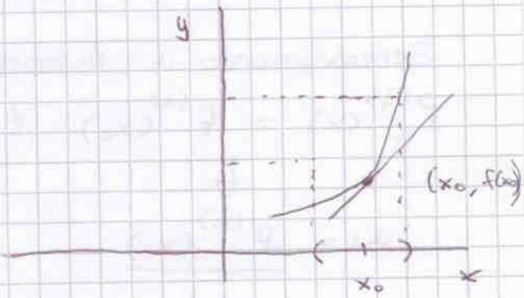
→ determinare gli $n+1$ coefficienti

↳ il problema fondamentale è trovare gli $n+1$ coeffi

1 caso $n=1$

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$P_1(x_0) = f(x_0)$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0)$$



2 caso $n=2$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \Rightarrow P_2(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$\begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2'(x_0) = f'(x_0) \\ P_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

$$P_2'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) \Rightarrow a_1 = f'(x_0) = P_2'(x_0)$$

$$P_2''(x) = 2a_2 \Rightarrow P_2''(x_0) = \boxed{2a_2 = f''(x_0)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

SERIE DI SEGNO ALTERNO

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ dove $a_k > 0 \; \forall k \geq k_0$

CRITERIO DI LEIBNIZ:

Sia $\{a_k\} \downarrow \; \forall k \geq k_1 \geq k_0$

e $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

allora la serie converge

$\lim_{k \to +\infty} (-1)^k a_k = 0$

$-a_k \leq (-1)^k a_k \leq a_k$

Es: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ $a_k = \frac{1}{k}$

$\Downarrow$ converge

Es:

$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi + \frac{1}{k}\right)$ $\sin(\alpha+\beta)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cancel{\sin(k\pi)} \cos\left(\frac{1}{k}\right) + \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k}$

$\left\{ \sin \frac{1}{k} \right\}$

Es $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = S$

$k_0 = 1$

$S_1 = -a_1 < 0 < S$

$S_2 = -a_1 + a_2 > S$

$S_3 = -a_1 + a_2 - a_3 < S$

$S_4 = S_3 + a_4 > S$

Allora $S_{2n+1} < S < S_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|S - S_n| < |S_n - S_{n+1}|$

~~XXXXI~~ Lenoro
12/01/11

Analisi Matematica

LANDAU

Siano f e g, infinitesime per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$f = o[g] \text{ per } x \to x_0 \quad \text{se} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

la funzione è f è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto a g

$$f = o[(x-x_0)^k] \quad (k \in \mathbb{N})$$

per $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ f è un infinitesimo di ordine superiore a k

$$f = o[1] \text{ per } x \to x_0$$

$\Leftrightarrow$ per convenzione

classe di funzioni

Es

dimostrare che:

$$o[(x-x_0)^h] + o[(x-x_0)^k] = o[(x-x_0)^i] \text{ per } x \to x_0$$

dove $i = \min\{h, k\}$

Dim sia $f = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$

Sia $g = o[(x-x_0)^k]$

suppongo $h \le k$

the $f + g = o[(x-x_0)^h]$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x)}{(x-x_0)^h} \stackrel{?}{=} 0$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h}}_{=0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^h} =$$

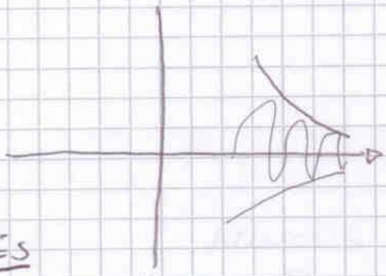
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k} (x-x_0)^{k-h} \quad \text{se } k \begin{cases} = h \Rightarrow 1 \\ > h \Rightarrow 0 \end{cases}$$

Es: Dimostrare che $\sin\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3}$ almeno definitivamente

$\frac{1}{k^3} - \sin\frac{1}{k^3} > 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^3} - \sin\frac{1}{x^3} > 0 \quad \forall x \geq x_0$

$f(x) > 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2}\cos\frac{1}{k}$



$f'(x) = \frac{3}{x^2}\left(-1 + \cos\frac{1}{x^3}\right) < 0$

$f'(x) < 0 \Rightarrow$

Es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{k\sqrt[5]{k} + \ln k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{k\sqrt[5]{k} + 2\ln k}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\alpha+\frac{1}{3}}}{k^{6/5} + 2\ln k} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)x^{\alpha-\frac{2}{3}}}{\frac{6}{5}x^{1/5} + \frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)x^{\alpha+\frac{1}{3}}}{\frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}} + 2}$$

se $\alpha + \frac{1}{3} = \frac{6}{5}$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)}{6}$

$\alpha = \frac{13}{15}$

Es: Studiare il carattere

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}\,\ln k} \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{k^\alpha}{k^{2/3}\ln k} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-2/3}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\alpha > 2/3) \quad \alpha = 2/3 \to \Delta = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^{\alpha-2/3} = +\infty \qquad \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \quad \alpha = 1$$

la serie diverge

[redacted] lezione
11/01/11

Analisi Matematica

Es: $\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x} \to f(0)=0$

$f'(x) = \cos x \to f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \to f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = -1$

$f''(x) = f(x)$ ⋮

$$P_{(2n+1)}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Es: $f(x) = \cos x$

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$\forall x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$f(x) = P_n(x)$ se $x = x_0$

$f(x) \simeq P_n(x)$ se $x \neq x_0$

TEOREMA (corollario): Sia $f \in C^{n+1}(I_\delta(x_0)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ allora $\forall x \in I_\delta(x_0)$ si ha

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove un punto c è compreso tra x_0 e x

Funzione resto espressa in termini di LAGRANGE

$f \in C^n(A)$ (di classe)

$\forall x \in A \ \exists f^{(n)}(x)$

e $f^{(n)}(x)$ è continua in A

Es

$f \in C^1(A)$

$\exists f'(x)$ in A e $f'(x)$ è continua

$\Rightarrow$

3 caso $n=3$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3$$

condizioni

$$\begin{cases} P_3(x_0) = f(x_0) \\ P_3'(x_0) = f'(x_0) \\ P_3''(x_0) = f''(x_0) \\ P_3'''(x_0) = f'''(x_0) \end{cases}$$

$$P_3'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2$$

$$P_3''(x) = 2a_2 + 3!\,a_3(x-x_0)$$

$$P_3'''(x) = 3!\,a_3$$

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \\ 2a_2 = f''(x_0) \Rightarrow a_2 = \dfrac{f''(x)}{2} \\ 3!\,a_3 = f'''(x) \qquad = \dfrac{f'''(x)}{3!} \end{cases}$$

Generalizzando il discorso

$$P_n^{(i)}(x) = f^{(i)}(x_0) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \qquad i=1 \;\; P_n'(x) \qquad i=2 \;\; P_n''(x)$$

$$\Downarrow$$

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è l'unico polinomio che approssima nel modo migliore la funzione

POLINOMIO DI TAYLOR CON PUNTO INIZIALE x_0

Se $x_0 = 0$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$ Polinomio di Mc Laurin

Es

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$= P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

~~XXXXII~~ lezione
12/01/11

Analisi Matematica

Es: Dimostrare che

$$(x-x_0)^h \cdot o\left[(x-x_0)^k\right] = o\left[(x-x_0)^{h+k}\right] \text{ per } x \to x_0$$

Dim: Hp: $f = o\left[(x-x_0)^k\right]$ per $x \to x_0$

th: $(x-x_0)^h \cdot f(x) = o\left[(x-x_0)^{h+k}\right]$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)^h} \cdot f(x)}{(x-x_0)^{h+k}} = 0$$

$$(x-x_0)^h = o\left[(x-x_0)^h\right] \text{ per } x \to x_0 \quad \text{non si può scrivere!}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)^h}{(x-x_0)^h} = 1$$

Es: Dimostrare che

$$o\left[o\left[(x-x_0)^h\right]\right] = o\left[(x-x_0)^h\right] \text{ per } x \to x_0$$

Hp $f = o\left[(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

$g = o\left[f\right]$ per $x \to x_0$

th $g = o\left[(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^h} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^h} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{g(x)}{f(x)}}_{\Downarrow \, 0} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{(x-x_0)^h}}_{\Downarrow \, 0} = 0$$

Es $h \le k$

$$o\left[(x-x_0)^h + o\left[(x-x_0)^k\right]\right] = o\left[(x-x_0)^h\right] \text{ per } x \to x_0$$

$$\begin{cases} f = o\left[(x-x_0)^k\right] & \text{per } x \to x_0 \\ g = o\left[(x-x_0)^h + f\right] & \text{per } x \to x_0 \end{cases}$$

$$\left\{ g = o\left[(x-x_0)^h\right] \right. \quad ''$$

$\Downarrow$

TEOREMA: sia $f \in C^{n+1}(I_\delta(x_0))$

allora $\forall x \in I_\delta(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove c è compreso tra x e x_0

FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE n DELLA FUNZIONE f CON PUNTO INIZIALE x_0 CON RESTO ESPRESSO IN TERMINI DI LAGRANGE

Es:

Dare una stima di $e^{0.2}$ 10^{-6}

approssimare numeri irrazionali con numeri razionali

$$r \in \mathbb{Q} \;/\; |e^{0.2} - r| < 10^{-6}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$ dove c è compreso tra x e 0

$$e^{0.2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(0.2)^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}$$ dove $c \in (0, 0.2)$

$$\Big| e^{0.2} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(0.2)^k}{k!}}_{r \in \mathbb{Q}} \Big| = \Big| \frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} \Big|$$

$$e^c < e^{0.2} < e^1 < 3$$

$$\Big| \frac{e^c}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} \Big| < \frac{3(0.2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

per $n=5$

$$\frac{3 \cdot (0.2)^6}{6!} = 2.6 \times 10^{-7}$$

$$r = \sum_{k=0}^{5} \frac{(0.2)^k}{k!} = 1.22140\overline{26}$$

XXXXIII lezione
13/01/11

Analisi matematica

$$c\,o[(x-x_0)^h] = o[(x-x_0)^h]$$ (1)

$$o[f] - o[f] \overset{?}{=} o[f]$$

ESERCIZI (d'esame)

- Siano $f = o[g]$ per $x \to x_0$
  $g = o[h]$ "

Dimostrare se sono vere o false

① $f = o[h]$ "

② $f = o[gh]$ "

Hp $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$

① $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \overset{?}{=} 0$

$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\to 0}$ è quindi vero

② $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\underbrace{g(x)}_{\to 0} \cdot h(x)} \overset{?}{=} 0$

Cerco di particolarizzare prendendo delle funzioni che verificano le ipotesi ma non la tesi

$f(x) = (x-x_0)^i$ $\quad i > J$

$g(x) = (x-x_0)^J$

$h(x) = (x-x_0)^k$ $\quad J > K$

è falso

$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{i-(J+K)} \neq 0$

$i = 5 \quad J = 3 \quad K = 2$

Esercizio

Sia $f = o[x^k]$ per $x \to 0$

Dimostrare che

$o[x^3] + f(x) = o[x^3]$

solo se $K \geq 3$

Es. dimostrare che

$$o\left[(x-x_0)^h\right] \cdot o\left[(x-x_0)^k\right] = o\left[(x-x_0)^{h+k}\right] \text{ per } x \to x_0$$

Dim Sia $f = o\left[(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

$g = o\left[(x-x_0)^k\right]$ per $x \to x_0$

$f(x) \cdot g(x) = o\left[(x-x_0)^{h+k}\right]$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{(x-x_0)^{h+k}} \overset{?}{=} 0$$

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k}}_{=0}$$

Es: Sia $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$o\left[c \cdot (x-x_0)^h\right] = c \cdot o\left[(x-x_0)^h\right] = o\left[(x-x_0)^h\right] \text{ per } x \to x_0$$

Dim

$f = o\left[c\,(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

$g = o\left[(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

th

① $f = o\left[(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

② $c \cdot g(x) = o\left[(x-x_0)^h\right]$ per $x \to x_0$

① $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow c \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{c(x-x_0)^h}}_{=0} = 0$

② $\lim_{x \to x_0} \frac{c\,g(x)}{(x-x_0)^h} \overset{?}{=} 0 = c \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^h}}_{=0} = 0$

XXXXIII lezione
13/01/11

Analisi Matematica

$$f \in C^n(I_\delta(x_0)) \qquad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

dove c è compreso tra x, x_0

se $x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(c) = \lim_{c \to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0)$$

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x) + o[1] \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + o[1]$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot o[1]$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o[(x-x_0)^n] \quad \text{per } x \to x_0$$

dove c è compreso tra x e x_0

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^h} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^h + f(x)} \cdot \frac{(x-x_0)^h + f(x)}{(x-x_0)^h}$$

$\frac{g(x)}{(x-x_0)^h+f(x)} \to 0$

$$\left(1 + \frac{f(x)}{(x-x_0)^k}\right) \cdot (x-x_0)^{k-h}$$

$\frac{f(x)}{(x-x_0)^k} \to 0$, $\quad (x-x_0)^{k-h} \to \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Es: Sia $f = o[1]$ per $x \to x_0$

allora

$$\frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + o[f(x)]$$

Dim

$$\frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + \frac{f^2(x)}{1+f(x)} = o[f(x)]$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^2(x)}{1+f(x)}}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1+f(x)} = 0$$

Es $f = o[1]$ per $x \to x_0$

$$\frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + f^2(x) + o[f^2] \text{ per } x \to x_0$$

$$\frac{1}{1+f(x)} = 1 - f(x) + f^2(x) - \frac{f^3(x)}{1+f(x)}$$

$$\frac{f^3(x)}{1+f(x)} = o[f^2] \text{ per } x \to x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^3(x)}{1+f(x)}}{f^2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 1}{1+f(x)}} = 0$$

~~XXXXIV~~ lezione
13/01/10

Analisi Matematica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x + x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(\sin x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1$$

Calcolare con Mc Laurin

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o[x^3]}{x + o[x]}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o[x^3] \quad \text{per } x \to 0$$

$$e^x = 1 + x + o[x]$$

non è 1 tende a 1

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o[x^2]\right)}{\cancel{x}(1 + o[1])} = 1$$

Es $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ $\quad x = t+1$

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t}$ sostituzione per far tendere $x \to 0$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} =$$

$$(e^x - 1)^2 = (x + o[x])^2$$

$$x^2 + o[x^2]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1 + o[1])}{x^2 + o[x^2]} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 + o[1])}{x^2(1 + o[1])} = \nexists$$

Dimostrazione

Hp Sia $g = o[x^3]$ → perché così?

Th $\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + f(x)}{x^3} = 0$ solo se $K \geq 3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} \cdot x^{k-3}$$

$\frac{f(x)}{x^k} = 0$

$$K \begin{cases} 0 & K > 3 \\ 1 & K = 3 \\ \nexists & K < 3 \end{cases}$$

Esercizio (d'esame)

Siano $f = o[\sin x]$ per $x \to 0$

$g = o[x]$ " Verificare se è vero o falso

$f+g = o[\sin x + x]$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f+g}{\sin x + x} = \frac{f}{\sin x + x} + \frac{g}{\sin x + x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin(x)}}{\frac{\sin x + x}{\sin x}} + \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x)}{x}}{\frac{\sin x + x}{x}}$$

$\frac{f(x)}{\sin(x)} \to 2$, $\frac{\sin x + x}{\sin x} \to 2$, $\frac{g(x)}{x} \to 0$, $\frac{\sin x + x}{x} \to 2$

- Esempi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} \qquad \frac{2x}{2x} = \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{2}\,1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + \sin x} \Rightarrow \frac{2x}{2x + \cos x} = \frac{2}{2 + \cos x} \quad 0$$

Sorgente : http://holsi.hasanaj.com/
Autore : Holsi Hasanaj
Professore: Pierpaolo Natalini
Corso di Ingegneria Informatica Roma Tre
Anno di produzione: 2010-2011

XXXXIV lezione
14/01/10

Analisi Matematica

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - (\cos x)^2}{x^2 \sinh x^2}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o[t^4]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o[x^8]$$

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o[t^5]$$

senx

$$\hookrightarrow + \frac{0}{6!} t^6 + o[t^6]$$

per ~~segni~~ esponenti pari e ~~di~~ dispari

TEOREMA - Sia $f \in C(I_\delta(x_0))$ allora $\forall x \in I_\delta(x_0)$ si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left[(x-x_0)^n\right]$$

Es

Polinomio di Mc Laurin

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left[x^n\right] \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left[x^{2n+1}\right] \quad \text{per } x \to 0$$

Es : Dimostrare che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ con TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left[x^5\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left[x^5\right]}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left[x^4\right]\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left[x^4\right] = 1$$

Analisi Matematica

xxxxv lezione 14/01/10

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-(\cos x)^2}{x^2 \sinh x^2}$$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o[t^2] \text{ per } t\to 0$$

$$t=-x^2$$

$$e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}+o[x^4] \text{ per } x\to 0$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o[x^4]$$

$$\sinh t = t+\frac{t^3}{3!}+o[t^3] \Rightarrow t+o[t]$$

$$t=x^2$$

$$\sinh x^2 = x^2+o[x^2]$$

$$\cos^2 x = 1+\frac{x^4}{4}+o[x^4]-x^2+\frac{x^4}{12} = 1-x^2+\frac{1}{3}x^4+o[x^4]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2+\frac{x^4}{2}+o[x^4]-1+x^2-\frac{x^4}{3}}{x^4(\cancel{x}\,1+o[\cancel{x}\,1])} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\frac{1}{6}+o[1]\right)}{x^4(1+o[1])} = \frac{1}{6}$$

Es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o[x]}{x^2+o[x^2]} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1+o[1]}{1+o[1]}\right)$$

$\sin x = x + o[x]$ per $x \to 0$

$e^t = 1 + t + o[t]$ per $x \to 0$ $\quad t = x^2 \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + o[x^2]$

Es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o[x]}{x} = 1$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o[x^2]$ per $x \to 0$

$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o[x^2]$

$t = x + \frac{x^2}{2} + o[x^2]$ per $x \to 0$

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o[t^3]$ per $t \to 0$

$\sin t = t + o[t]$

$$\boxed{o\left[(x-x_0)^h + o\left[(x-x_0)^k\right]\right] = o\left[(x-x_0)^h\right]}$$

prevale sempre l'esponente minore

$\sin t = t + o[t]$

$$\sin(e^x - 1) = \underbrace{x + \frac{x^2}{2} + o[x^2] + \underbrace{o\left[x + \frac{x^2}{2} + o[x^2]\right]}_{= o[x]}}_{x + o[x]}$$

Analisi Matematica ~~XXXXV~~ lezione 17/01/10

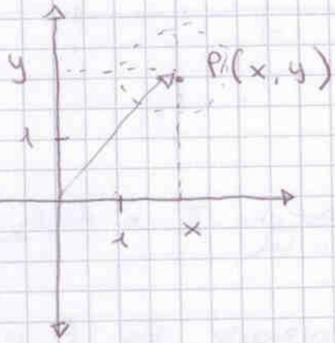
FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

$R^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$P_1 = (x_1, y_1)$

$P_2 = (x_2, y_2)$

$d(P_1 P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



generalizzazione

Intorno sferico di in un punto in $\mathbb{R}^2$

non si può stabilire l'ordine

$I_\delta(P_0) = \{ P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, d(PP_0) < \delta \}$

$I_\delta(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x - x_0| < \delta \}$

per l'intorno sulle ascisse

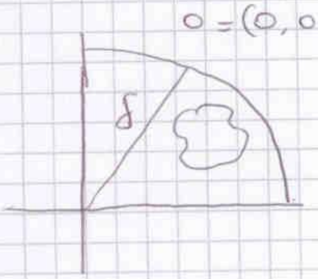
$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$

sto ~~con~~ considerando il cerchio senza la circonferenza

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

Definizione: A si dice limitato ~~superiormente~~ se $\exists\, \delta > 0$ tale che $A \subset I_\delta(\vec{0})$ $\quad 0 = (0, 0)$



Definizione: $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ si dice p.to interno di A $(P_0 \in \mathring{A})$ se $\exists\, \delta > 0 \,/\, I_\delta(P_0) \subset A$

$\mathring{A}$ è insieme dei punti interni è l'insieme di punti esclusi il contorno

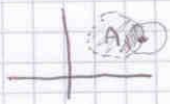
Analisi Matematica

XXXXVI lezione
18/01/10

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (DA)

$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. P_0 si dice p.to di accumulazione di A se $\forall \delta > 0$ si ha che $(I_\delta(P_0) \cap A) \setminus \{P_0\} \neq \emptyset$

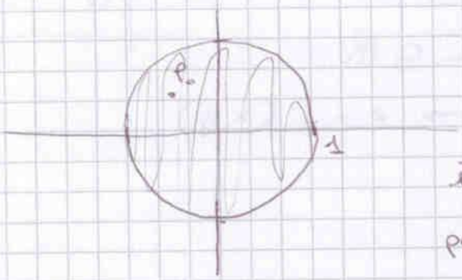
Es: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} \leq 1,\ x \in \mathbb{Q}\}$



determinare $\mathring{A}$, $C\mathring{A}$, $\mathcal{F}A$, DA

A è aperto, è chiuso, è limitato?

A è connesso per archi?



$P_0 = (x_0, y_0) \in A$

$\forall \delta > 0 \quad \exists\, i \in \mathbb{I} /$

$i \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

perchè $\mathbb{I}$ è denso in $\mathbb{R}$

$\mathring{A} = \emptyset$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$

$C\mathring{A} = \mathbb{R}^2 \setminus B$

$\mathcal{F}A = B$ ($\Rightarrow$ non dovrebbe essere $\mathcal{F}A = B \setminus A$)?

$DA = B$

A non è aperto NO

A non è chiuso

A è limitato

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - 1 + x^2}{x(\sin(3x) - 3x)}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o[t^2] \overset{t=\alpha x^2}{\Longrightarrow} e^{\alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o[x^4]$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o[t^3] \overset{t=3x}{\Longrightarrow} \sin 3x = 3x - \frac{\overset{9}{\cancel{27}} x^3}{\cancel{6}\,2} + o[x^3]$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\alpha)x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o[x^4]}{-\frac{9}{2}x^4 + o[x^4]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\alpha) + x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} + o[1]\right)}{x^2\left(-\frac{9}{2} + o[1]\right)}$$

0^+

$$= \begin{cases} \text{se } \alpha = -1 \Rightarrow -\frac{1}{9} \\ \text{se } \alpha \neq -1 \Rightarrow +\infty \text{ se } 1+\alpha < 0 \quad \alpha < -1 \\ \qquad\qquad -\infty \text{ se } \alpha > -1 \end{cases}$$

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-1)^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^\alpha}$$

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \dots + o[t^n]$$

$$= \frac{t - t^3/3 + o[t^3]}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - t^2/3 + o[t^2]}{t^{\alpha-1}} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ 0^+ & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Analisi Matematica

XXXXVI lezione
18/01/10

ESERCIZIO D'ESAME

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\ln(x^2+y^2)}}{x+y}$$

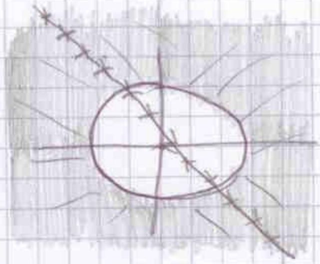
condizioni

$x^2+y^2>0 \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$\ln(x^2+y^2)\geq 0$

$x^2+y^2 \geq \quad x^2+y^2\geq 1$

$x+y=0 \quad x=-y$



$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2\geq 1 \text{ e } y\neq -x\}$$

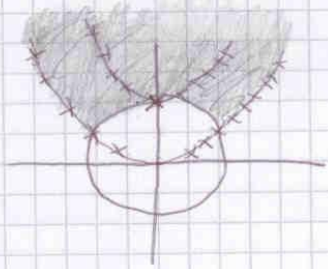
ESERCIZIO D'ESAME

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\ln(y-x^2)}$$

$x^2+y^2-1\geq 0$

$y-x^2 \neq 1 \quad y=x^2+1$

$y-x^2>0 \quad y>x^2$

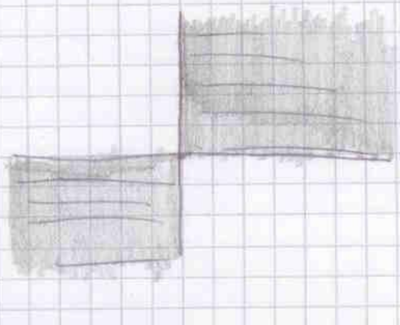


Esercizio

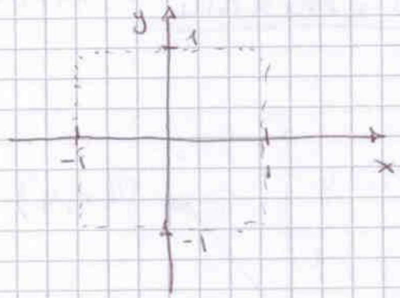
$$h(x,y) = \begin{cases} x\ln\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$\frac{y}{x}\geq 0$

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \frac{y}{x}\geq 0\}$$



Es: $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x| \leq 1, |y| \leq 1 \text{ e } x,y \in \mathbb{Q} \}$



non ci sono punti interni

$\mathring{A} = \emptyset$

Sia $P_0 \in A$

$\forall \delta > 0 \quad I_\delta(P_0) \not\subset A$ perché $I_\delta(P_0)$ contiene p.ti a coordinate irrazionali

perché $\mathbb{I}$ è denso in $\mathbb{R}$

Definizione: un $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice aperto se $A = \mathring{A}$

Definizione: $\complement A = \mathbb{R}^2 \setminus A$

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto

Definizione: $P_0 \notin A$ si dice esterno ad A se $P_0 \in \mathring{\complement A}$ (sia $A \subset \mathbb{R}^2$)

Definizione: $P_0 \in \mathcal{F}A$ se $P_0 \notin \mathring{A}$ e $P_0 \notin \mathring{\complement A}$

p.to di frontiera

Analisi Matematica

XXXXVII lezione
20/01/10

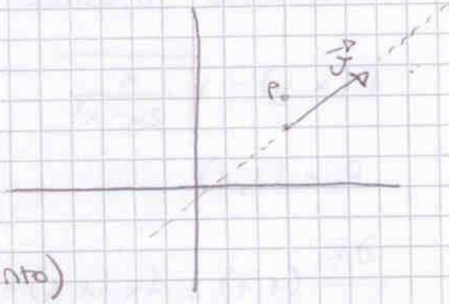
$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$$

$y = mx + q$

$P_0 = (x_0, y_0) \in D \cap DD$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$

$f(x,y) = f(x, mx+q) = g(x)$



$h \in \mathbb{R}$ (rappresenta l'incremento)

$P = (x_0 + hv_x, y + hv_y) \in D$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hv_x, y_0+hv_y) - f(x_0 y_0)}{h} =$$

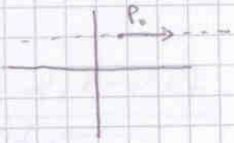
$$= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$$

Se il vettore v è un versore $|\vec{v}| = 1$

si chiama derivata direzionale

$\hat{i} = (1,0)$

$\hat{j} = (0,1)$



$P = (x_0+h, y_0) \in D$

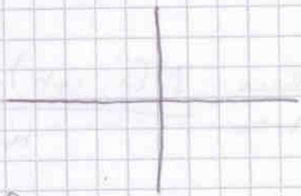
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0 y_0)}{h}$$

la funzione è derivabile parzialmente

il p.to è chiamato derivata parziale

$\hat{j} = (0,1)$

$P = (x_0, y_0+h) \cancel{+ f(x_0 y_0)} \in D$

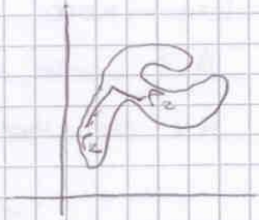


$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0 y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$$

Definizione : si dice spezzata in $\mathbb{R}^2$ e' unione di un numero finito di segmenti uniti a due a due

un solo segmento è una spezzata

Definizione : $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso (per archi) se $\forall\, P_1, P_2 \in A \;\; \exists$ una spezzata contenuta in A di estremi P_1, P_2



FUNZIONE DI DUE VARIABILI REALI

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$$
$$(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y)$$

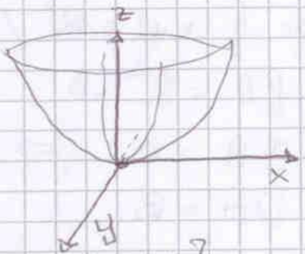
Es

$z = f(x, y) = x^2 + y^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$f(0,0)$

$f(0,1)$



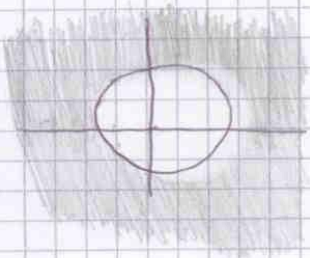
$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x, y) \in D_f,\; z = f(x, y)\}$$

Esercizio d'esame determinare il dominio

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \qquad y^2 + x^2 \geq 1$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \geq 1\}$$



Analisi Matematica

~~XXXXVII~~
20/01/10

ESERCIZIO D'ESAME

$$f(x,y) = \begin{cases} x \ln\left(1 + \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

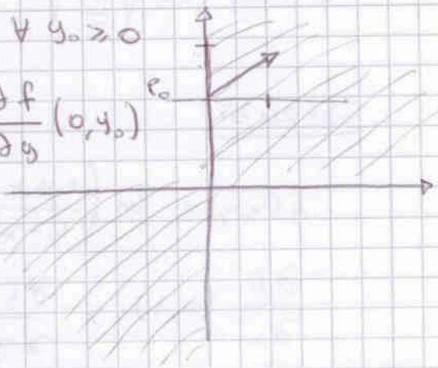
$P_0 = (0, y_0) \quad y \geq 0 \qquad \forall\, y_0 \geq 0$

$\vec{u} = (0,1)$

$\vec{v} = (2,1)$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$$



(1)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0, y_0+h) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

(2) CASO a) $y_0 > 0$

b) $y_0 = 0$

a) $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h v_x,\ y_0 + h v_y) - f(0, y_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2h,\ y_0 + h) - \overset{0}{\overset{\parallel}{f(0, y_0)}}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{2h} \cdot \ln\left(1 + \sqrt{\frac{\overbrace{y_0 + h}^{\to y_0}}{\underbrace{2h}_{\to 0^+}}}\right) = +\infty$$

Analisi Matematica

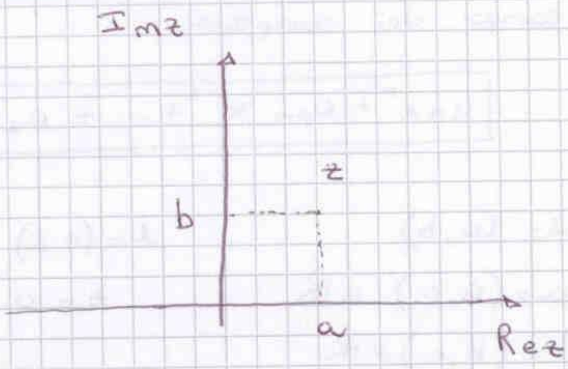
NUMERI COMPLESSI

$z \in \mathbb{C}$

$z = (a, b)$

$a, b \in \mathbb{R}$

PIANO DI GAUSS



a parte reale di z

b parte immaginaria di z

$z = a + ib$
$w = c + id$

SOMMA NUMERI COMPLESSI

$z + w = (a+c, b+d)$

$\mathbb{C}$ è un campo

$z = (a, b)$
$w = (c, d)$

$z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$

non è possibile stabilire una relazione di ordine
→ non sono presenti l'assioma d'ordine e l'assioma di completezza

Es

$z = (a, 0) \in \mathbb{R}$

$w = (c, 0) \in \mathbb{R}$

$z + w = (a+c, 0)$

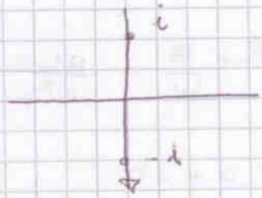
$z \cdot w = (a \cdot c, 0)$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ un numero reale è un particolare numero complesso

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$i = (0, 1)$

$\boxed{i^2} = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1, 0)$
$= -1 \in \mathbb{R}$



IL GRADIENTE $\vec{\nabla} f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right)$

ESERCIZIO D'ESAME

$f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{2y - x^2}}$ $\quad D_f$?

$P_0 = (1,1)$

$\frac{x}{2y-x^2} \geq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = f_x(1,1) = ?$

$2y - x^2 \neq 0 \quad y \neq \frac{x^2}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = f_y(1,1) = ?$

tutti i p.ti delle ordinate la funzione vale 0

$f(0,1) = 0$

numeratore e denominatore devono esse o entrambi positivi o entrambi negativi

$x > 0$ e $2y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2$

$x < 0$ e $2y - x^2 < 0 \Rightarrow y < \frac{x^2}{2}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{\frac{1+h}{2-(1+h)^2}} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2-(1+h)^2 - (1+h)(-2(1+h))}{(2-(1+h)^2)^2}}{2\sqrt{\frac{1+h}{2-(1+h^2)}}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1, 1+h) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{1+2h}} - 1}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-\frac{2}{(1+2h)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{1+2h}}} = -1$$

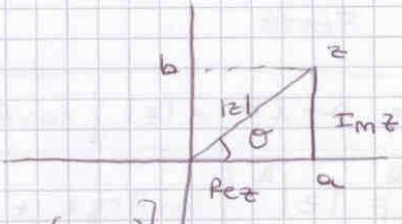
XXXXVIII
21/01/11

Analisi matematica

$\mathrm{Arg}\, z$ (argomento principale)

$\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, z = |z| \cos(\mathrm{Arg}\, z) \\ \mathrm{Im}\, z = |z| \sin(\mathrm{Arg}\, z) \end{cases}$$



$$z = a + ib = |z| \{\cos(\mathrm{Arg}\, z) + i \sin(\mathrm{Arg}\, z)\}$$

Es

$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$

$\mathrm{Arg}\, z = ?$

(conosco la parte reale e la parte immaginaria voglio conoscere $|z|$ e $\mathrm{Arg}\, z$)

Se $\mathrm{Re}\, z = 0$ e $\begin{cases} \mathrm{Im}\, z > 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z = \pi/2 \\ \mathrm{Im}\, z < 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z = -\pi/2 \end{cases}$

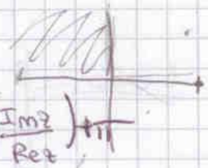
Se $\mathrm{Re}\, z > 0$

$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\, z < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \mathrm{tg}(\mathrm{Arg}\, z)$$

$$\mathrm{Arg}\, z = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right)$$

Se $\mathrm{Re}\, z < 0$ e $\mathrm{Im}\, z > 0$



$$\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \mathrm{tg}(\mathrm{Arg}\, z) \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right) + \pi$$

$$\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\, z < \pi$$

Se $\mathrm{Re}\, z < 0$ e $\mathrm{Im}\, z < 0$

$$\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \mathrm{tg}(\mathrm{Arg}\, z) \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right) - \pi$$

b) $y_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+2h,\ 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot 2h \ln\left(1+\sqrt{\frac{h}{2h}}\right)$$

$$= 2\ln\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Esercizi

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{2+x}{y-x^2}\right) \qquad D_f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$$

Esercizio

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha(x^2+y^2)-\alpha & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ \sqrt{x^2+y^2}-1 & \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$$

Quadro Matematico 24/01/11

$w = \sqrt[n]{z}^{\,\mathbb{C}} \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

$w^n = z \qquad w \in \mathbb{C}$

$z = |z| \cdot \{\cos(\mathrm{Arg}\,z) + i\sin(\mathrm{Arg}\,z)\}$

$w = |w| \cdot \{\cos(\mathrm{Arg}\,w) + i\sin(\mathrm{Arg}\,w)\}$

FORMULA DI DE MOIVRE

$$\boxed{(\cos(\mathrm{Arg}\,z) + i\sin(\mathrm{Arg}\,z))^n = \cos(n\,\mathrm{Arg}\,z) + i\sin(n\,\mathrm{Arg}\,z))}$$

$$|w|^n = \{\cos(n\,\mathrm{Arg}\,w) + i\sin(n\,\mathrm{Arg}\,w) = |z|\{\cos(\mathrm{Arg}\,z) + i\sin(\mathrm{Arg}\,z)\}$$

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\,\mathrm{Arg}\,w = \mathrm{Arg}\,z + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|}^{\,\mathbb{R}} \\ \arg w = \dfrac{\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$w = \sqrt[n]{z}^{\,\mathbb{C}} = \sqrt[n]{|z|}\left\{\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi}{n}\right)\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Per $k=0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left\{\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}\right)\right\}$

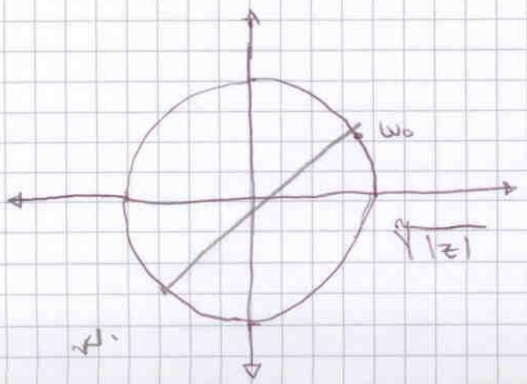
$k=1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|z|}\left\{\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2\pi}{n}\right) + i\sin(\ )\right\}$

$k=n-1 \Rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}\left\{\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin(\ )\right\}$

$k=n \Rightarrow w_n = \sqrt[n]{|z|}\left\{\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi}{n}\right) + i\sin(\ )\right\}$

$'' \ \dfrac{\mathrm{Arg}\,z}{n} + 2\pi$

$$w = \sqrt[n]{z}^{\,\mathbb{C}} = \sqrt[n]{|z|}\left\{\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi}{n}\right)\right\} \quad k \in = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



le radici si distribuiscono in maniera diametralmente opposta

↳ dipende dalla regolarità delle funzioni sin x / cos x

TEOREMA DELL'ALGEBRA

Un equazione di n-esimo grado ammette n soluzioni nel campo dei complessi

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0} \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$z = (a,b)$ $\qquad i = (0,1)$

$a = (a,0) \in \mathbb{R}$ $\qquad z = a + ib$

$b = (b,0) \in \mathbb{R}$

Dimostrare che

$z \overset{?}{=} a + ib$

$(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$

CONIUGATO DI z

$\bar{z} = a - ib$ $\qquad z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 > 0$

MODULO

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

Es

$z = a + ib$

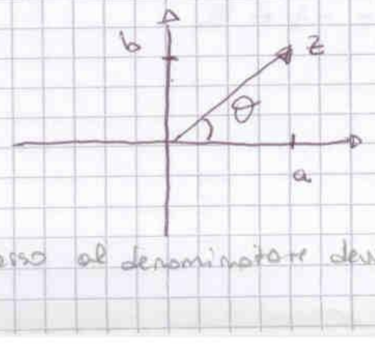
$w = c + id \neq 0$ $\qquad \frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = (ac+bd)^{+i(a}$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd) + i(-ad+bc)}{c^2+d^2}$$

$\mathrm{Re}\,\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathrm{Im}\,\frac{z}{w} = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

$z = a + ib$

θ = argomento di z



(!) quando ho un numero complesso al denominatore devo razionalizzare

Analisi Matematica 24/01/11

$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

$a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $(b \neq 0)$ una soluzione di (1)

Dimostrare che

$\bar{z} = a - ib$ (coniugato è anche soluzione)

FATTORIZZAZIONE:

$$(x-z)(x-w) = x^2 - \underbrace{(w+z)}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{z \cdot w}_{\in \mathbb{R}}$$

ESERCIZIO D'ESAME

$|z-3| \leq Re(z)+1$ ⇗ trovare in piano di Gauss

$z = x + iy$ $\quad |(x-3) + iy| \leq x+1$

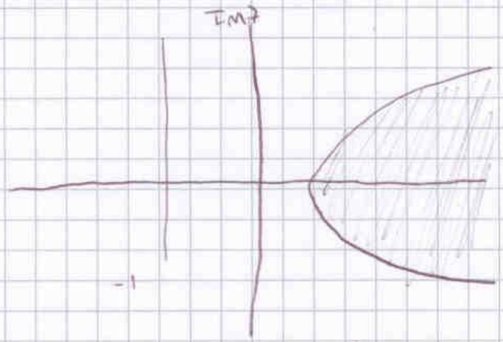
$$\sqrt{\underbrace{(x-3)^2 + y^2}_{\mathbb{R}}} \leq x+1$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ (x-3)^2 + y^2 \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 \leq x^2 + 2x + 1$$

$$8x - 8 \geq y^2 + 8$$

$\Downarrow$

$x \geq \frac{1}{8} y^2 + 1$



$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, Re\,z \geq \frac{1}{8} (Im\,z)^2 + 1 \right\}$$

RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE

$$z = a + ib = |z| \{\cos Arg z + i \sin Arg z\}$$

$$z = a + ib$$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

~~TEORE~~

$$\boxed{e^{ib} = \cos b + i \sin b}$$

formula di eulero

$$\boxed{z = a + ib = |z| \{\cos Arg z + i \sin Arg z\} = |z| \, e^{i Arg z}}$$

$$\boxed{z^n} = |z|^n \{\cos Arg z + i \sin Arg z\}^n =$$

$$= |z|^n \{\cos(n Arg z) + i \sin(n Arg z)\}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

ESERCIZIO D'ESAME:

det. le soluzioni

$$2(z + \bar{z}) - 3 \, Im z = z^2 - 3|z|^2$$

$$z = x + iy$$

$$2(2x) - 3y = x^2 - y^2 + 2ixy - 3(x^2 + y^2)$$

$$4x - 3y = x^2 - y^2 + 2ixy - 3x^2 - 3y^2$$

$$\begin{cases} 0 = 2xy \\ 4x - 3y = x^2 - y^2 - 3(x^2 + y^2) \end{cases}$$

1 caso $\begin{cases} x = 0 \\ -3y = -4y^2 \end{cases}$ $\left\langle \begin{array}{l} 0 = y \\ y = 3/4 \end{array} \right.$

$z_1 = 0$
$z_2 = \frac{3}{4} i$
$z_3 = -2$

2 caso $\begin{cases} y = 0 \\ 4x = -2x^2 \end{cases}$ $\left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$

Analisi Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALE

$$f^2(x) - 2f(x) + \sqrt{f(x)} = 3 \quad \text{(equazioni funzionali)}$$

l'equazione differenziale è una particolare equazione funzionale in cui compaiono le derivate

(!) integrare l'equazione differenziale significa trovare le soluzioni

ORDINE DI DERIVAZIONE: massima derivata che compare

→ EQUAZIONE DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARABILI

1) $f'(x) = u(x) \cdot v[\underbrace{f(x)}_{t}] \quad \Rightarrow \quad y' = u(x) \cdot v(y)$

Es: $f'(x) = x\,[1 + f^2(x)]$ $\quad u(x) = x$, $\quad v(t) = 1 + t^2$

→ EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARI I° ORDINE

2) $y' + a(x)y = b(x)$

→ EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI II° ORDINE

3) (a coeffi. costanti)

$y'' + ay' + by = g(x)$ $\quad g(x)$ è noto

1) $\boxed{v(y) \neq 0}$ $\quad \dfrac{y'}{v(y)} = u(x) \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)\,dx}{v[f(x)]} = \int u(x)\,dx$

$dy = f'(x)dx$

$$\int \frac{dy}{v(y)} = \int u(x)\,dx$$

Es $\quad y' = (1 + y^2)x \qquad y = f(x)$

$1 + y^2 = 0$ non la mettiamo $\qquad \dfrac{y'}{1+y^2} = x$

$\Downarrow$

Es: $\sqrt{i}$

$z = i$

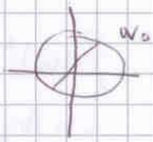
$|z| = 1$

$\text{Arg} z = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{i} = 1 \cdot \left\{ \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\overset{\frac{\pi}{2}}{\text{Arg} z} + 2k\pi}{2}\right) \right. \quad \text{per } k = 0,1$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{5}{4}\pi + i \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$



Es $\sqrt{-1}$

$z = -1$

$|z| = 1$

$\text{Arg} z = \pi$

$$\sqrt{-1} = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) \quad \text{per } k = 0,1$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} =$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi = -i$$

Es

$$\boxed{\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{(-1)\cdot 3} = \sqrt{-1}^{\,\mathbb{C}} \cdot \sqrt{3}^{\,\mathbb{R}}$$

Es

$\sqrt{3}^{\,\mathbb{C}}$

$|3| = 3$

$\text{Arg} z = 0$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \left\{ \cos\frac{2k\pi}{2} + i \sin k\pi \right\} \quad \text{per } k = 0,1$$

$w_0 = \sqrt{3}$

$w_1 = -\sqrt{3}$

$\sqrt{4}^{\,\mathbb{R}} = 2$

$\sqrt{4}^{\,\mathbb{C}} < \begin{matrix} +2 \\ -2 \end{matrix}$

Analisi Matematica

EQ. DIFFERENZIALI, LINEARI I° ORDINE

$y' + a(x)\,y = b(x)$

$a(x), b(x)$ continue in un Intervallo J

$I(x) \to$ fattore integrante (funzione particolare che si determina ponendo $c = 0$)

$\to I(x) = e^{\int a(x)\,dx}$

$$\boxed{y = \frac{1}{I(x)} \left\{ \int I(x)\, b(x)\, dx + c \right\} \quad \forall x \in J}$$

Es: $y' = -\frac{1}{x} y + 2\sqrt{x}$

$y' + \frac{1}{x} y = 2\sqrt{x}$

$a(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x > 0$ ha senso $\qquad$ $J\,(0, +\infty)$

$b(x) = \sqrt{x}$

$\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x \qquad I(x) = x$

$y = \frac{1}{x} \left\{ 2 \int x\sqrt{x}\, dx + c \right\} \quad \forall x \in J$

$\int x^{3/2}\,dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5}\, x^2 \cdot \sqrt{x}$

$y = \frac{\frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + c}{x}$

ESERCIZIO D'ESAME

Determinare le soluzioni di questa equazione

$$\left(\frac{z}{i+\sqrt{2}}\right)^2 = -4i \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{i+\sqrt{2}} = \sqrt{-4i} = \pm i\sqrt{4}$$

$$\frac{z}{i+\sqrt{2}} = 2\sqrt{-i}$$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{|-i|} = \left\{\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right\} \quad k=0,1$$

$$N_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \qquad N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$z_1 = (i+\sqrt{2})\,2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$z_2 = (i+\sqrt{2})\,2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

Analisi matematica

ES:

$$y' + \frac{1}{x} y = 2y^2\sqrt{x} \qquad x>0$$

$y = 0$ è soluzione

$$v = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$y' \cdot y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = 2\sqrt{x}$$

$$v' = -1\, y^{-2} \cdot y'$$

$$y^{-2} \cdot y' = -v'$$

$$-v' + \frac{1}{x} v = 2\sqrt{x}$$

$$v' - \frac{1}{x} v = -2\sqrt{x}$$

$$e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x\left\{\int \frac{1}{x} \cdot (-2\sqrt{x})\, dx + c\right\}$$

$$-2\int x^{-1/2} dx = -4x^{1/2} \Rightarrow v = -4x\sqrt{x} + cx$$

$$y = \frac{1}{cx - 4x\sqrt{x}}$$

EQ. DIFF. LINEARI A COEFF. COST. DEL II ORDINE

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$g(x)$ è continua in un intervallo I

$$y'' + ay' + by = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha^2 + a\alpha + b = 0}$$

$\Delta > 0$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0 = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Delta = 0$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ (molteplicità 2) $\Rightarrow y_0 = e^{\alpha x}(c_1 + c_2 x) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_1 - i\beta_1\end{matrix}\right\} \in \mathbb{C} \Rightarrow y_0 = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos\beta_1 x + c_2 \sin(\beta_1 x))$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \operatorname{arctg} y + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c \qquad y = \tan \frac{x^2}{2} + c$$

Es

$$y' = \sqrt{y-1}\;x \qquad \frac{y'}{\sqrt{y-1}} = x \qquad y \neq 1$$

$y = f(x) = 1$ è soluzione

$y' = f(x) = 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int x$$

$$y = f(x) = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2 + 1$$

$$2\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \frac{x^4}{16} - 1 + c$$

Soluzione singolare $\Rightarrow$ se non si ottiene da quella generale per nessun valore di c reale né per $c \to \pm\infty$

Es:

$$y' = (y-1)\,x \qquad y \neq 1$$

$$\frac{y'}{y-1} = x \qquad \int \frac{dy}{y-1} = \int x\,dx \qquad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}+c} + 1 \quad \text{se } y \geq 1 \qquad y = -e^{\frac{x^2}{2}+c} + 1 \quad \text{se } y < 1$$

Soluzione particolare poiché per $c \to -\infty$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad 1 - y^2 \neq 0 \quad y^2 \neq \pm 1$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{x}\,dx \qquad \operatorname{arcsen} y = \ln|x| + c$$

$y = \text{sen}\ln|x| + c$ soluzione generale

Soluz. singolari

PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} \arcsin 0 = \ln 1 + c \\ 0 = c \end{cases}$

$$y = \sin(\ln|x| + c)$$

Analisi Matematica

$\Rightarrow$ $y = y_0 + y_p$

$$\boxed{y_p = Ax^2 + Bx + C}$$

$y'_p = 2Ax + B$

$y''_p = 2A$

$2A + 2Ax + B = x + 1$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \\ \forall C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$y = \frac{1}{2}x^2$

LA SOLUZIONE GENERALE

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$$

ESERCIZIO D'ESAME

$y = y_0 + y_p$

$y_0 = e^{-x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$

$y = y_0 + y_p$

$y_p = Ax^2 + bx + C$

$y'_p = 2Ax + B$

$y''_p = 2A$

$$\begin{cases} 2A + 4Ax + 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2 + 1 \\ 2Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + 2C = x^2 + 1 \\ \begin{cases} 2A = 1 \\ 4A + 2B = 0 \\ 2A + 2B + 2C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$y_p = \frac{x^2}{2} - x + 1$

ES

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = 2x \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

$x \in (-\infty, 0) = J_1$

$x \in (0, +\infty) = J_2$

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & se\ x>0 \\ \ln|x| + c_2 & se\ x<0 \end{cases}$$

$f(1) = 1$

$$y = \frac{1}{x}\left\{2\int x^2 dx + c\right\}$$

$$y = \frac{1}{x}\left\{\frac{2}{3}x^3 + c\right\} \qquad y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{c}{x}$$

$$1 = \frac{2}{3} + c \qquad c = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3x}$$

$$y' + a(x)y = b(x) \cdot y^n \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$n = 0 \Rightarrow$ uguale a quella

$n = 1 \Rightarrow$ di sopra omogenea

EQ. DIFF. DI BERNOULLI

$$y' + a(x)y = b(x) \cdot y^n$$

$n \in \mathbb{N}$

$n \geq 2$

$y \neq 0$

$y = 0$ è soluzione di

$$y' \cdot y^{-n} + a(x)\, y^{1-n} = b(x)$$

$v = y^{1-n} \to v' = (1-n)y^{-n} y'$

$v(x) = y(x)^{1-n}$

$v'(x) = (1-n)\, y^{-n} \cdot y'(x)$

$y' \cdot y^{-n} = \frac{v'}{1-n}$

$$\frac{v'}{1-n} + a(x)v = b(x)$$

$$\frac{v' + (1-n)a(x)v}{1-n} = b(x)$$

$$\boxed{v' + (1-n)a(x) = (1-n)b(x)}$$

Analisi matematica

3 CASO $\quad g(x) = P_n(x)\, e^{\beta x}$

$Q_n(x) = P_n(x)$

y_p → $Q_n(x)\, e^{\beta x}$ ⇒ se β non è sol. dell'eq. algebrica omogenea

y_p → $Q_{n+m}(x)\, e^{\beta x}$, se β è sol. dell'equaz. algebrica dell'omogeneo di molteplicità m

ESERCIZIO

$$y'' + y' - 2y = (x+1)e^{-x}$$

$$y = y_0 + y_p \qquad y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y_p = (Ax+B)e^{-x}$$

$$y_p' = A e^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$$

$$y_p'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}$$

$$-2A + \cancel{Ax} + B + A - \cancel{Ax} - B - 2Ax - 2B = x+1$$

$$-2A(x) - A - 2B = x+1$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-x}$$

ESERCIZIO

$$y'' + y' - 2y = (x+1)\,e^{x}$$

sol. gen. $\qquad y = y_0 + y_p$ $\qquad$ sol. particolare

$$y_p = (Ax^2 + Bx + c)\,e^{x} \qquad B = 2/9 \quad A = 1/6$$

RISOLVERE L'OMOGENEA

$y'' + y' - 2y = 0 \qquad \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \qquad \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

$y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ES

$y'' - 2y' + y = 0 \qquad \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \qquad (\alpha - 1)^2 = 0$

$\alpha = 1 \ (\times 2)$

$y_0 = e^{x}(c_1 + c_2 x) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ES

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \qquad \dfrac{-1 \pm \sqrt{-1}}{1} = -1 \pm i$

$y_0 = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

$\boxed{y'' + ay' + by = g(x)} \qquad y = y_0 + y_p$

$y'' + ay' + by = 0$

SOLUZIONE PARTICOLARE

1 CASO

$g(x) = P_n(x)$

$\boxed{y_p = Q_{n+r}(x)}$ r è l'ordine minimo di derivazione

PRINCIPIO DI DETERMINAZIONE DEI POLINOMI (quello dei fratti semplici)

ES

$y'' + y' = x + 1$

$y'' + y' = 0$

$\alpha^2 + \alpha = 0 \ \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$

$y_0 = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x}$

Analisi matematica

$K \in \mathbb{R}$

ESERCIZI D'ESAME

$y'' - 2y' - Ky = x$

$\alpha^2 - 2\alpha - K = 0$

$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+K}$

1 caso a

$1+K > 0 \Rightarrow K > -1$

$y_0 = c_1 e^{(1+\sqrt{K+1})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{K+1})x}$

2 caso

$1+K = 0 \Rightarrow K = -1$

3 CASO

ESERCIZIO D'ESAME:

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + x \sin x$

$y'' + ay' + by = g(x)$

2 caso

$$\boxed{g(x) = \alpha e^{\beta x}}$$

$y_p =$
- $A e^{\beta x}$ se β non è soluzione dell'eq. algebrica dell'omogenea
- $A x^m e^{\beta x}$ se β è soluzione dell'eq. algebrica dell'omogenea di molteplicità m — è il numero di volte che conto gli zeri

ESERCIZIO

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} \qquad y = y_0 + y_p$$

$$y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \qquad y_p = A e^{-x}$$

$$y' = -A e^{-x}$$

$$y'' = A e^{-x}$$

$$A e^{-x} - A e^{-x} - 2A e^{-x} = e^{-x}$$

$$-2A = 1 \to A = -\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x} \qquad y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y_p = Ax e^{-2x}$$

$$y'_p = A e^{-2x} - 2Ax e^{-2x}$$

$$y''_p = -2A e^{-2x} - 2A e^{-2x} + 4Ax e^{-2x}$$

$$-4A e^{-2x} + \cancel{4Ax e^{-2x}} + A e^{-2x} - \cancel{2Ax e^{-2x}} - 2Ax e^{-2x} =$$

$$-3A = 1 \Rightarrow A = -1/3$$

4 CASO $g(x) = K_1 \sin(\beta x) + K_2 \cos(\beta x)$

y_p → ① $A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \Rightarrow \pm i\beta$ non sono sol dell'omogeneo

→ $x\,(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)) \Rightarrow$ se $\pm i\beta$ sono sol dell'equaz. algebrica dell' ~~eq~~ omogenea

ESERCIZIO

$y'' + y' - 2y = 3\cos(5x)$

$K_1 = 0 \quad K_2 = 3$

$\beta = 5 \qquad \pm 5i$

$y_p = A\sin(5x) + B\cos(5x)$

Esercizio

$y'' + y = \sin x$

$K_1 = 1$

$K_2 = 0$

$\beta = 1$

$\alpha^2 + 1 = 0 \;\Big<\; \begin{matrix} i \\ -i \end{matrix}$

$y_0 = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$y_p = x(A \sin x + B \cos x)$

$y'_p =$

y''_p

$A = 0$

$B = -\frac{1}{2}$

$y_p = -\frac{x \cos x}{2}$